

Pour une arithmétique démocratique !

La journée de l'IREM
2 avril 2025

Christine Chambris
christine.chambris@cyu.fr

Professeure en didactique des mathématiques
LDAR, CY Cergy Paris Université, INSPé de l'académie de Versailles

Une arithmétique démocratique ?

- L'arithmétique à l'école et au début du collège c'est-à-dire...
le nombre, le calcul, les quatre opérations, la proportionnalité
- Arithmétique enseignée à tous les élèves...
- et apprise par tous les élèves !
- Quelle arithmétique ?
 - Investiguer le réel, observer des phénomènes
 - Envisager des explications
 - Des pistes pour une arithmétique démocratique...

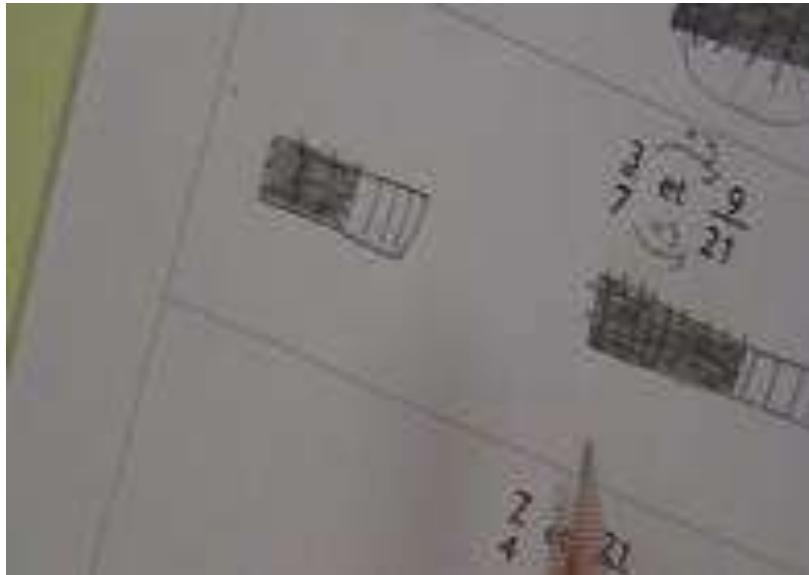
L'arithmétique à l'école : une arithmétique pour tous ?

- Des phénomènes d'enseignement

Comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ (CM2)

$\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ à comparer (CM2, vers 2018)

Travail en binôme



CLEM: Trois fois, donc c'est **trois fois plus petit** et là on met **trois fois plus**. C'est pareil

Prof : Tu penses que c'est égal, d'accord.

CLEM (en s'adressant à E2) : t'es d'accord ?

E2 : oui....si tu le dis

CLEM: je veux que tu sois d'accord...pas que tu le fasses comme ça....

CLEM: donc...

E2 : oui, parce que tu rajoutes et puis...

CLEM: oui...oui...

Quartier prioritaire, Bordeaux

(Chambris, Coulange, Rinaldi, & Train, 2021)

$\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ à comparer (CM2, vers 2018)

P : Est-ce tout le monde est d'accord pour dire que des 21 ièmes, c'est trois fois plus petits que des 7 ièmes ? (...)

P : Sauf que, elle prend, je prends trois fois plus de parts. J'ai fait des parts plus petites, trois fois plus petites mais j'en prends trois fois plus.



Temps collectifs

Quartier prioritaire, Bordeaux

Première partie du raisonnement

Un phénomène (N1)



La quantité orange est plus petite que la quantité rouge,

Un phénomène (N1)



La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.



La quantité orange est plus petite que la quantité rouge,

Pour avoir une quantité plus petite, 2 fois, 3 fois, dix fois, on peut prendre le même nombre d'unités mais des unités chacune plus petites, 2 fois, 3 fois, dix fois.

Les 21^e c'est trois fois plus petit que les 7^e. Donc, trois 21^e, c'est trois fois plus petit que trois 7^e.

Deuxième partie du raisonnement

Un autre phénomène (N2)

Pour avoir une quantité plus grande, 2 fois, 3 fois, dix fois, on peut prendre les mêmes unités, mais en prendre davantage, 2 fois, 3 fois, dix fois plus.

Des 21^e, j'en prends 3 fois plus. C'est 3 fois plus grand !

$\frac{9}{21}$ c'est trois fois plus grand que $\frac{3}{21}$!

Une propriété (N1)

Pour rendre une quantité (exprimée sous la forme de p unités) k fois plus grande, il suffit de prendre p unités, chacune k fois plus grande.

- Qui témoigne d'un bon sens du nombre chez les élèves qui l'ont
- Est-ce une propriété importante ou anecdotique ? Utile ?

Le glisse-nombre, des maths pour tous ?

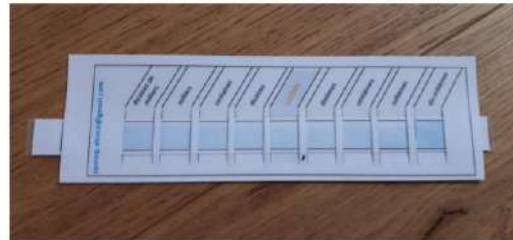
La règle à privilégier.

« Multiplier par 10, c'est donner à chaque chiffre une valeur 10 fois plus grande, le chiffre des unités devient donc le chiffre des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc. »

Cette règle permet :

- d'utiliser la même règle de multiplication par 10, 100, 1000 pour tous les nombres décimaux (entiers ou non)
- de donner du sens à la multiplication par 10, 100, par 0,1...

Présentation du glisse-nombre



<https://jn2020.apmep.fr/Présentation-du-glisse-nombre>

Modèles individuels
ou pour la classe.



Le glisse-nombre, des maths pour tous ?

- « multiplier par 10, c'est donner à chaque chiffre une valeur 10 fois plus grande, le chiffre des unités devient **donc** le chiffre des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc. » (MEN, 2016)
- Le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines, **donc** il prend une valeur dix fois plus grande **car la dizaine est dix fois plus grande que l'unité** et
N1 : Si on prend une unité k fois plus grande, pour un même nombre d'unités, on obtient une quantité k fois plus grande
- N1 est cachée dans l'utilisation du glisse-nombre
- N1 est à la base / source de la propriété de multiplication par dix de l'écriture décimale
- Le glisse-nombre : « trucs et astuces » pour remplacer une propriété ?

N1

- La propriété N1 est « transparente » dans l'utilisation du glisse-nombre.
 - Source de difficultés d'enseignement cachées
 - Source de difficultés d'apprentissage cachées
- À la source des techniques de manipulation multiplicatives des écritures chiffrées, des équivalences de fractions (notamment)
- Oui. Elle est très importante et très utile !

Une propriété (N1)

Pour rendre une quantité (exprimée sous la forme de p unités) k fois plus grande, il suffit de prendre p unités, chacune k fois plus grande.

Qu'est-ce que c'est ?

- $k.(p.u) = p.(k.u)$?
- Associativité ? $k.(p.u) = (k.p).u$
- Commutativité ? $k.p = p.k$

Une propriété (N1)

Pour rendre une quantité (exprimée sous la forme de p unités) k fois plus grande, il suffit de prendre p unités, chacune k fois plus grande.

- que TOUS les élèves doivent connaître pour avoir un « bon » sens du nombre
- à enseigner à TOUS ceux qui n'en ont pas l'intuition pour qu'elle devienne intuitive pour TOUS.

N1 : Une propriété intuitive

- Utilisée spontanément par certains élèves
- dans des raisonnements plus ou moins sophistiqués
- non reconnue ou non enseignée (car non enseignable) par les enseignantes

N1 : Une propriété non enseignable

- Pourquoi *non enseignable* ?
- Une propriété
 - qui n'apparaît pas dans les ressources pour les enseignant.e.s
 - pas de texte de savoir
 - comment l'enseigner? Quelles tâches ?
 - DONC qui ne peut pas être enseignée
- Un savoir « transparent » ou « invisible »
- La « transparence » de certains savoirs empêchent les enseignant.e.s d'enseigner ce qu'il y a à enseigner

Programmes 2025

CE2

L'élève sait expliquer pourquoi six huitièmes d'un tout est égal à trois quarts de ce tout, en s'appuyant sur des manipulations, sur des représentations géométriques et sur des verbalisations : « Si, pour un même tout, je fais des parts deux fois plus petites et si je prends deux fois plus de parts, alors j'en prends la même quantité ».



L'élève sait répondre à la question suivante : « Parmi les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$ quelles sont les fractions égales à $\frac{1}{2}$? ».

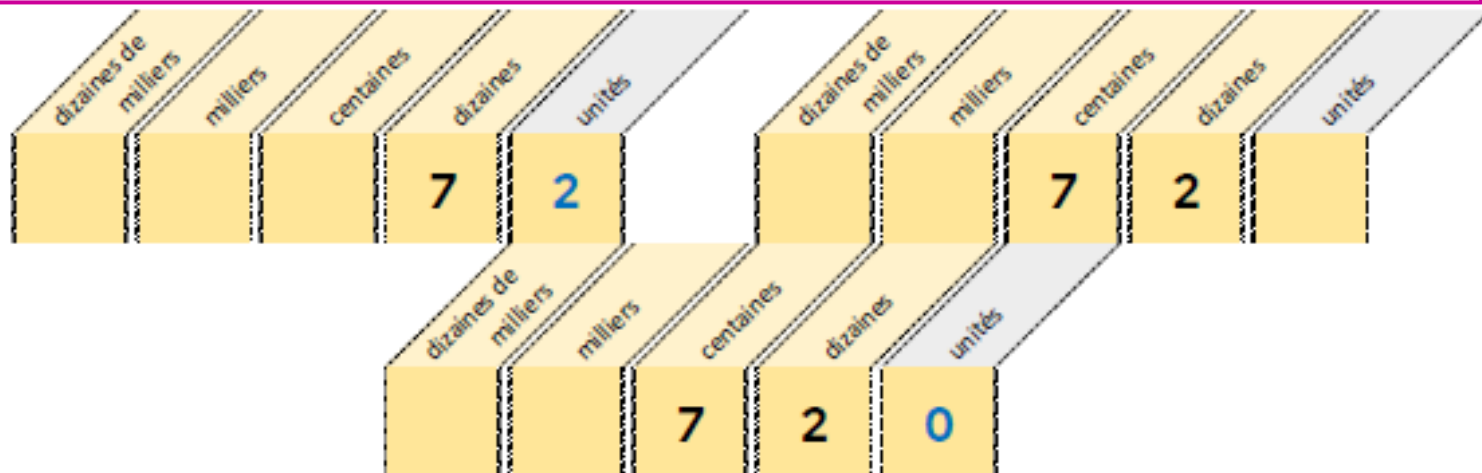
L'élève sait déterminer le numérateur manquant dans l'égalité $\frac{?}{8} = \frac{1}{2}$ et il sait justifier sa réponse.

CE1

CE2

L'élève sait que, lors d'une multiplication par 10, une unité devient une dizaine et une dizaine devient une centaine. Ainsi, chaque chiffre du nombre initial prend une valeur 10 fois plus grande : le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines et le chiffre des dizaines devient le chiffre des centaines.

Un outil du type « glisse-nombres » peut être utilisé pour accompagner les premières multiplications par 10, en complément de la verbalisation de la procédure en termes d'unités de numération. Progressivement, l'élève apprend à s'en détacher. Exemple : multiplication de 72 par 10.



$$10 \times 72 = 720.$$

Projets

CM1

CM2

Deux autres exemples

Dans la recherche en didactique

Montrer la fraction la plus grande

$\frac{4}{5}$ et $\frac{4}{7}$

- Clarke & Roche, 2009

Discours élèves :

- “ils ont quatre morceaux mais les cinquièmes sont plus grands”
- “il y a quatre pièces dans chaque, mais comme les septièmes sont plus petits que les cinquièmes, $\frac{4}{5}$ sera plus grand”

Les chercheurs décrivent la stratégie :

- « Les numérateurs sont identiques, comparer les dénominateurs. »

Les septièmes sont plus petits que les cinquièmes : il y a plus de parts, elles sont plus petites.

Montrer la fraction la plus grande

(Clarke & Roche, 2009)

Stratégie benchmarking / repère

Appelée aussi : « transitive » (transitivité de l'ordre, probablement)

- Repère (à un demi) : $3/7$ & $5/8$
"5/8 est plus que un demi et 3/7 est moins que un demi".
Traduit de Clarke & Roche, 2009
- Repère (à un demi) : $1/2$ & $5/8$
"1/2 est équivalent à 4/8, donc 5/8 est 1/8 de plus".
Traduit de Clarke & Roche, 2009
- ajout (ou retrait) d'une quantité au repère, qui rend plus grand (ou plus petit) que le repère.

Transparences

dans (Clarke & Roche, 2009)

- Les propriétés de la quantité ne sont repérées que très partiellement
- Parfois, à la place, propriété erronée : transitivité de l'ordre
- Écrasement des discours quantitatifs des élèves par des discours formels portant sur les nombres

Un moment de classe en CE1-CE2, vers 2020

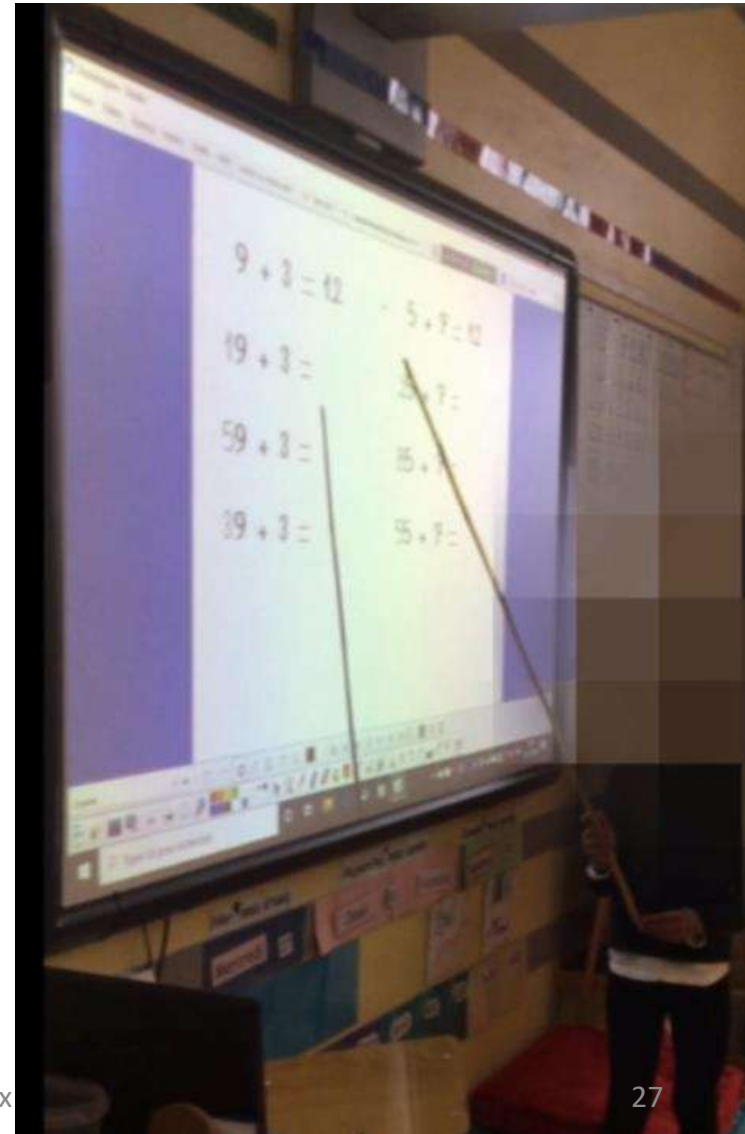
$$9 + 3 = 12$$

$$19 + 3 =$$

$$59 + 3 =$$

$$29 + 3 =$$

- Calculer $19+3$



P: Une autre technique / c'est autre chose / très différent

LUC : Oui

P : alors viens

LUC : À la place du 3 on met un deux et à la place du 9 on met un zéro et ça fait [inaudible]

P : On recommence. Refais-le.

LUC : [L pointe le 3] On enlève... [P le coupe]

P : Toi. Ici. [P pointe le membre de droite de l'égalité] Ici. Quand tu vas écrire le résultat, tu vas écrire quoi ?

LUC : Un 2

P : Le 2 qui est là [P pointe le 2 du 12]. Le 2 du 12.

LUC : Oui

P : D'accord mais après. Qu'est-ce que tu vas faire ?

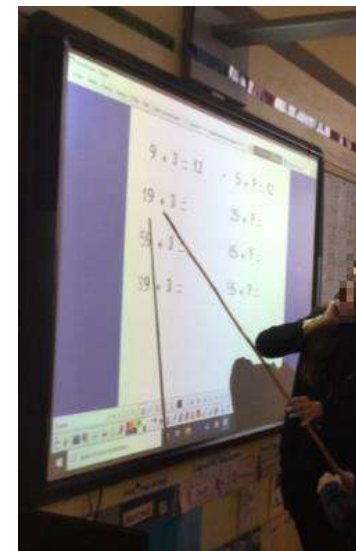
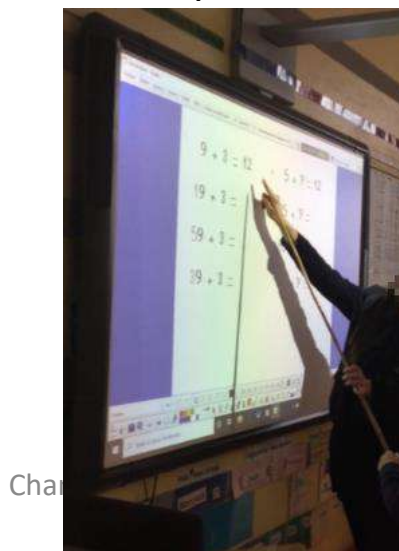
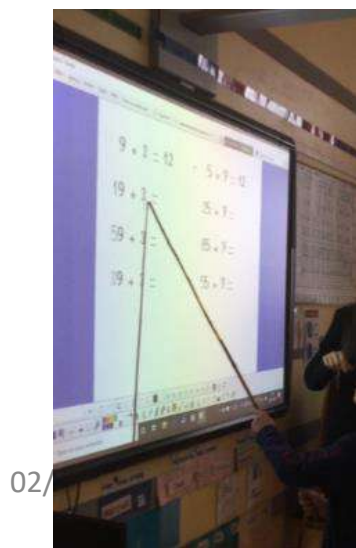
LUC : [L pointe le 9] Là c'est comme si y'avait un 10 et là un 2 [L pointe le 3] et après... [P le coupe]

P : 10 ? hum hum. C'est intéressant.

LUC: On enlève...

P: Le 2 qui est là

LUC: Là c'est comme si y'avait un 10



$$19 + 3 = (19 + 1) + (3 - 1)$$

- Associativité ? $19+(1+2)=(19+1)+2$
- Commutativité ?

Des propriétés de compensation

- Comp. Multiplicative : je prends k fois plus d'unités k fois plus petites, c'est pareil.
- Comp. Approximative : je prend plus d'unités (de parts) plus petites, c'est pareil
- Comp. Additive : si ça diminue d'un côté, ça augmente de l'autre

Des propriétés compagnons

- N1 : pour un même nombre d'unités, des unités k fois plus petites rendent la quantité k fois plus petite.
- M1 : pour un même nombre d'unités, des unités plus petites rendent la quantité plus petite.
- Add ?

Des propriétés constitutives d'un bon
sens du nombre !

L'arithmétique scolaire :

Pourquoi ces transparences ?

- Pourquoi ces savoirs sont-ils *non* étiquetés ?
non identifiés ?

De quoi ces propriétés sont-elles des propriétés ?

Le traité d'arithmétique de Bézout (1764/1821)

- Des propriétés :
 - §87 : il est visible que **plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité (Bézout 1)**
 - §88 : **Donc**, on peut rendre le dénominateur d'une fraction double, triple, quadruple, etc., sans rien changer à la valeur de la fraction pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc. (Bézout 2)
 - §9 : remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

Le traité d'arithmétique de Bézout (1764/1821)

- Notions préliminaires du traité
- §1 : on appelle, en général, **quantité**, tout ce qui susceptible d'augmentation ou de diminution.
- La quantité a des propriétés...
- De quoi les propriétés CM, Capp, Cadd, N1, M1 sont-elles propriétés ?
- De la quantité.
- Constitutives d'un bon sens du nombre.

Le traité d'arithmétique de Bézout (1764/1821)

- Des concepts :
 - §1 : on appelle, en général, **quantité**, tout ce qui susceptible d'augmentation ou de diminution.
 - §4 : **l'unité** est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour...
 - §5 : Le **nombre** exprime de **combien** d'**unités** ou de **parties d'unités** une **quantité est composée**
 - *Sur-unités et sous-unités* :
 - §8 : on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de dizaines.
 - §13 : **renfermer dix unités** d'un certain ordre, **dans une seule unité**
 - §17 : **on partage celle-ci [l'unité qu'on a choisie] en d'autres unités plus petites.**

Les mathématiques et la quantité

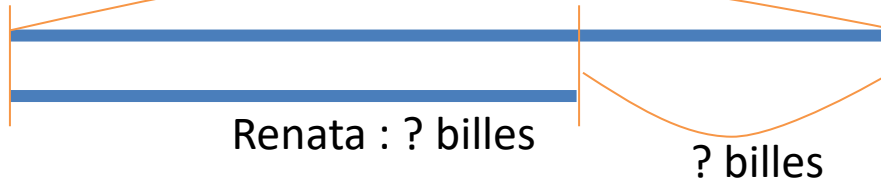
- Jusqu'au 19^e siècle : mathématiques science des quantités
- Le traité d'arithmétique de Bézout (1764/1821)
§1 : Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces sciences, ne considère les quantités qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.
- Gauss (1825-1826), à propos de l'arithmétisation de l'analyse (ou des mathématiques) :
Quelle est la condition essentielle pour qu'un enchaînement de concepts puisse être considéré comme se rapportant à une quantité ?
- L'oubli...

La ré-introduction des modèles en barres

- BOEN avril 2018
- Guides orange (CP), violet (CM), bleu (collège)...

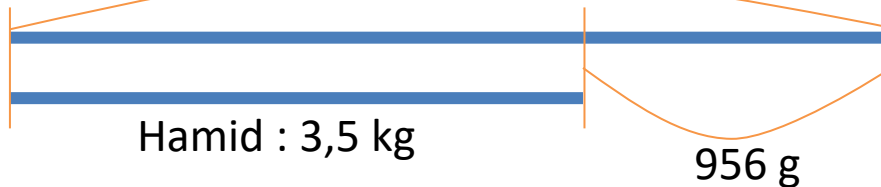
La ré-introduction des modèles en barres

Bill : ? billes

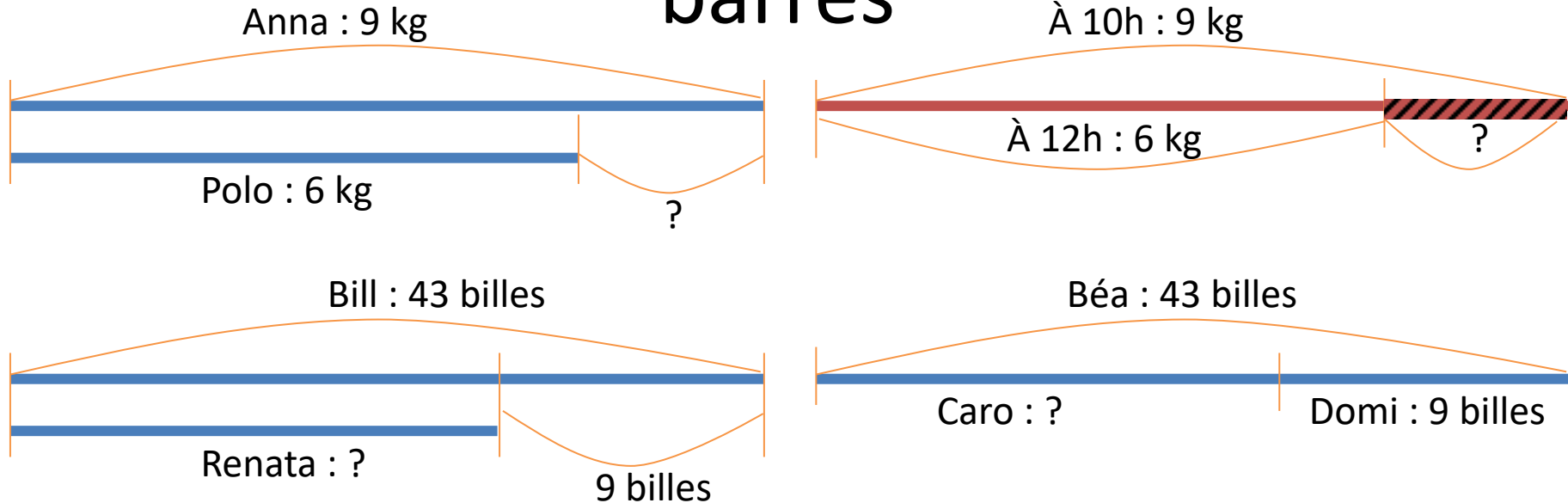


Des barres plus ou moins grandes pour des quantités* plus ou moins grandes

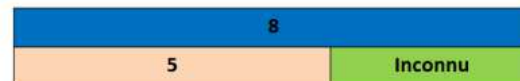
Carole : ? kg



La ré-introduction des modèles en barres



Modélisation pour ces quatre exercices



MAIS

- Exemple 1 : J'ai 8 billes. Je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?
- Exemple 2 : J'ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien de billes sont bleues ?
- Exemple 3 : J'ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?
- Exemple 4 : J'ai gagné 8 billes puis j'ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?

Magistère 2020
Formation des RMC

À propos de l'oubli

Un peu d'histoire des maths

- Jusqu'au 19^e siècle : mathématique science des quantités*
 - Objets de base : quantités*
 - Axiomatisation : idéalisation de la réalité
 - Lien avec la réalité dans la définition des objets
- 19^e siècle : arithmétisation de l'analyse (et des mathématiques)
- Aujourd'hui en mathématiques :
 - Objets de base : ensembles
 - Axiomatisation : non contradiction
 - Perte de lien avec la réalité dans la définition des objets
- Pour les mathématiciens, aujourd'hui : la *quantité** est (dans) l'intuition des nombres.

À propos de l'oubli

Un peu d'histoire de l'enseignement des maths de l'école

- Jusque 1940 : pas d'influence des transformations du 19^e siècle
- 1940-1970 : quelques effets
- Réforme des mathématiques modernes (1970) : élimination des quantités* des fondements (théoriques) des nombres, dans l'enseignement
- Et l'intuition des nombres pour les élèves ? Où est-elle ? Comment les enseignants peuvent-ils l'enseigner ?

À l'école, aujourd'hui

- Jeunes enfants : Appui *obligatoire* sur des « objets »
 - Souvent des collections
 - Parfois le continu
- Certains apprennent tout seul les propriétés des quantités*

LUC et BAS



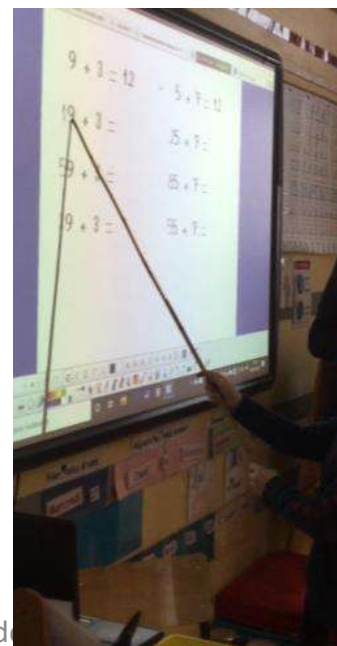
BAS : ici / regarde / là est
sa bouche



P : mmm / et oui / lui c'est
Grandes dents / il a une
grande bouche aussi



BAS : oui / et lui / a qu'un
nez / et t'as vu l'a pu de
place / paque un gros nez



LUC et BAS

- BAS et LUC utilisent la même propriété
 - BAS avec les *places (plus ou moins grosses) occupées*, par le nez et la bouche, *des quantités**
 - LUC avec les *quantités* (plus ou moins grosses, en plus précis)* qui se cachent derrière les chiffres

- Des savoirs incidents

VS

- Des savoirs enseignés
- Quelles situations d'enseignement ?

L'ordre des fractions unitaires

- $1/n < 1/m \Leftrightarrow n > m$
- Visnovska et Cortina
 - Milieux très défavorisés (Mexique, Afrique du Sud)
 - (Cortina, Visnovska, Zuniga, 2014)
 - Mama Khanyi et les pots (Vale, Graven, Visnovska, 2019) <https://hal.science/hal-04572483>

Un jour Mama Khanyi partit ramasser du bois pour le feu.

Deux anciens vinrent la voir. Ils venaient d'un village qui était très éloigné. Ils voulaient demander à Mama Khanyi de fabriquer un pot vraiment très particulier. Le pot était un cadeau pour un mariage.

Il fallait que le pot fasse exactement la même taille qu'un autre pot qu'ils avaient apporté.



Comme sa mère n'était pas là, Thembi le mesura avec ses propres mains, très soigneusement.

Quand Mama Khanyi revint des champs, Thembi lui raconta la visite des anciens.

Mama Khanyi était triste de les avoir manqués, mais Thembi lui dit qu'elle avait fait très attention en mesurant le pot.

« Mama, » dit-elle, « ils voulaient un pot qui mesure exactement TROIS mains de haut. Ils ont dit qu'ils viendraient le chercher demain. »



Thembi partit alors jouer et laissa Mama Khanyi faire le pot.

« Trois mains de haut, c'est facile à faire », se dit Mama Khanyi et elle commença à faire le pot.

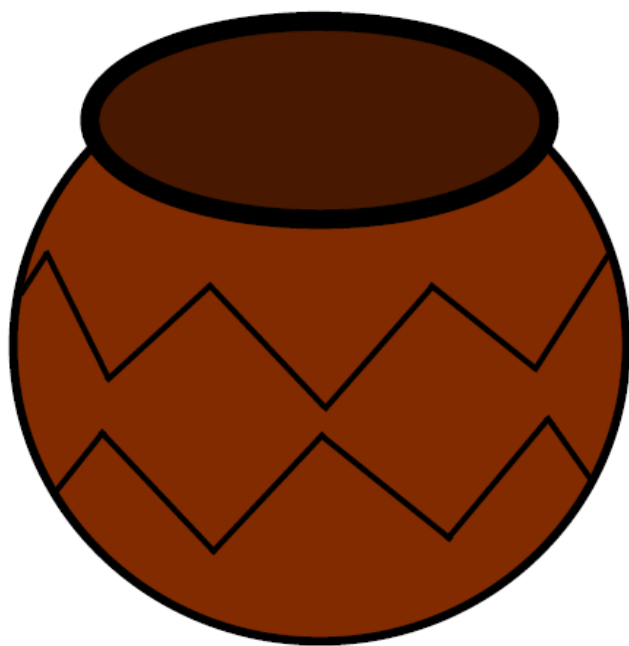
Elle travailla très soigneusement pour s'assurer que le pot était **EXACTEMENT** de trois mains de haut.



Les anciens revinrent le lendemain. Ils avaient rapporté le vieux pot et le posèrent à côté du nouveau. Le nouveau pot n'était pas de la bonne taille !

Quel est le pot que
Mama Khanyi a fait ?

Qu'est-ce qui te fait
dire ça ?



Plus tard

« Nous devrions commencer avec un morceau si long que lorsque nous mesurerons le bâton avec lui, il tiendra exactement DEUX fois le long du bâton » dit Mama Khanyi.

Elle ajouta « Nous appellerons ce nouveau morceau un otibele, car « bele » signifie petit, et « oti » signifie DEUX. »

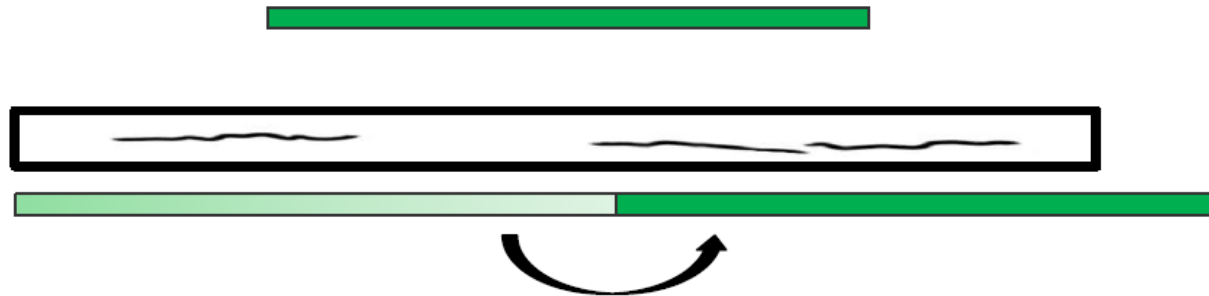
Un otibele tiendra exactement DEUX fois le long du bâton.



Combien d'otibele le bâton mesurera-t-il ?

Mama Khanyi commença à fabriquer un otibele. Elle coupa la tige pour en faire un morceau qui tient exactement DEUX fois le long du bâton.

Elle coupa d'abord ce morceau et le plaça le long du bâton pour tester s'il tenait exactement DEUX fois...



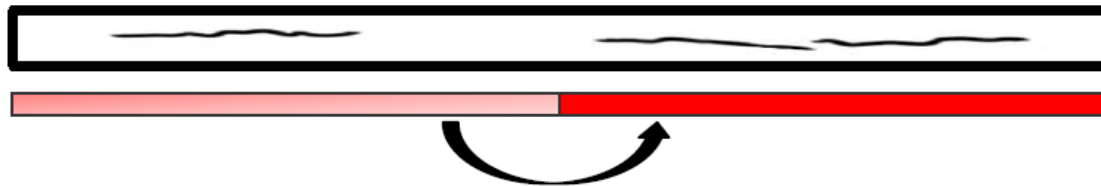
Est-ce un vrai otibele ?

Est-ce qu'un vrai otibele serait plus court ou plus long que celui-ci ?

Voici la longueur qu'elle a essayée...

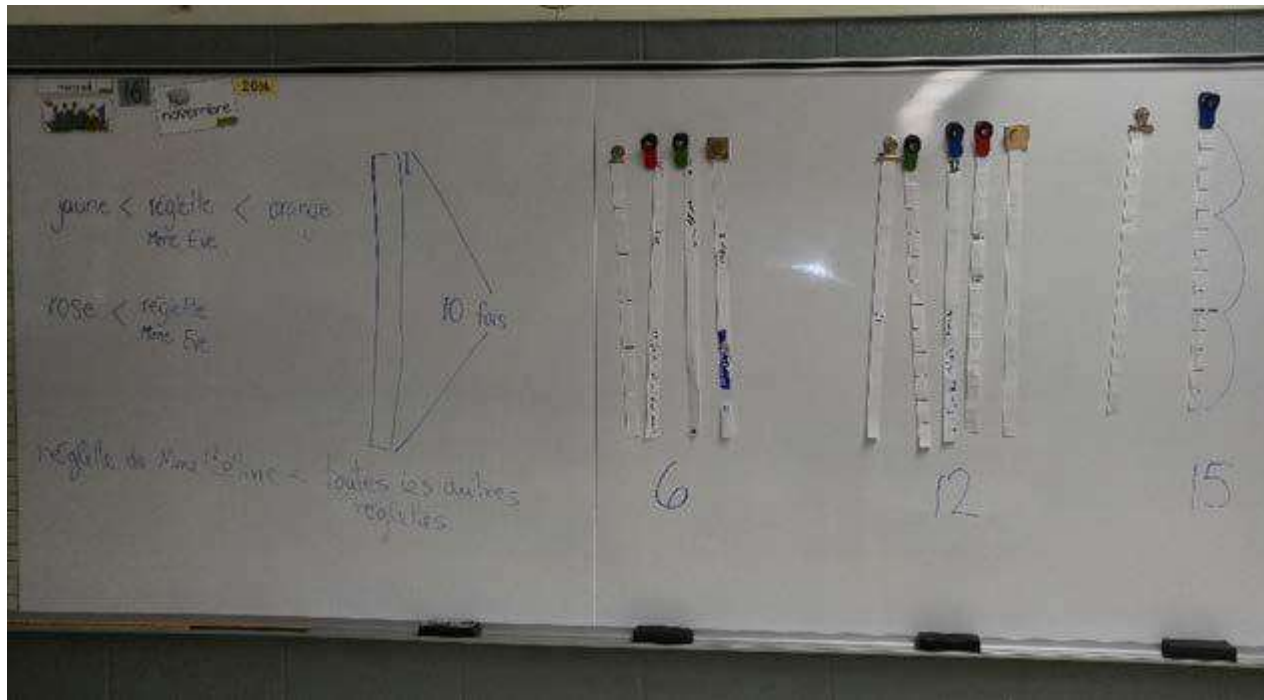


Quand elle l'a testée, elle a tenu exactement DEUX fois le long du bâton ! Elle l'a peinte en rouge pour savoir que c'était le petit qu'elle utiliserait pour mesurer les pots.



Comment Khanyi savait-elle que c'était un vrai otibele ?

M1 identifiée, N1 plus difficile



(Polotskaia & Savard, 2021)

- Les élèves mesurent une bande avec une règle rose. Ils trouvent 15. La même bande a été mesurée avec la règle de Céline (qu'ils ne voient pas), elle a trouvé 20. Ils doivent en déduire si la règle de Céline est plus courte ou plus que la règle rose.
 - “Quand c’est plus petit, cela entre plus de fois.” : Réussite
 - Précision sur la comparaison : échec (essais : la règle de Céline est 5 fois plus petite que la règle rose, 20-15, puis 2 fois plus petite, ajustement)
- Dans une autre classe : avec 15 pour la règle rose et 30 pour la nouvelle règle : “la nouvelle règle est deux fois plus petite que la rose”.

Un chantier

- Des propriétés assez bien identifiées
- La quantité* : pas encore bien cernée...
 - La quantité n'est pas matérielle mais elle est sensible... fondement de l'intuition des nombres
 - La quantité de BAS est moins sophistiquée que la quantité de CLEM
 - Plusieurs objets mathématiques qui se construisent successivement
 - Dont les propriétés se transmettent aux étages supérieurs... et s'enrichissent

Quelques réflexions pour conclure

Une arithmétique pour tous ?

- Une arithmétique du raisonnement avec des propriétés mathématiques qui portent sur des objets mathématiques

vs.

- Une arithmétique des trucs et astuces

Une arithmétique enseignable

- des savoirs sont identifiés, pour ce qu'ils sont
- des tâches permettent d'enseigner ces savoirs
- les enseignants sont formés !