

Math Data

Enseigner les **mathématiques du lycée**
via des **défis de données en IA**



Les objectifs de MathAData

Motiver et donner du sens aux mathématiques



Aider les élèves à progresser sur les attendus du programme



→ comment s'insérer dans les programmes et les cadres horaires du lycée ?

Notre proposition :

Travailler sur des challenges d'IA

Ressources pédagogiques pour les enseignants

Co-développement avec des enseignants et des académies

Déroulé de cette formation

Objectif : enseigner en motivant les maths via des challenges d'IA avec des expérimentations numériques

1. Bases mathématiques de l'apprentissage en IA
2. Présentation des ressources pédagogiques en classe
 - Présentation des ressources
 - Temps de manipulation guidée

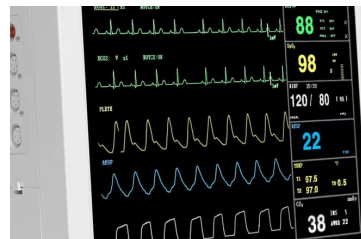
Qu'est-ce que l'IA ? Deux catégories d'algorithmes

Classification/régression

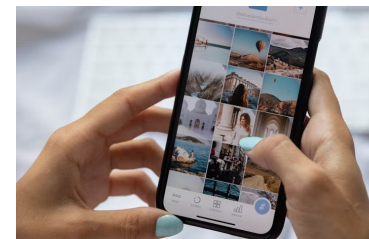
On choisit parmi une liste de réponses possibles



Voiture, robotique...
Contrôle de systèmes



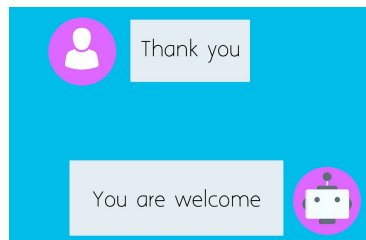
Reconnaissance,
diagnostic médical



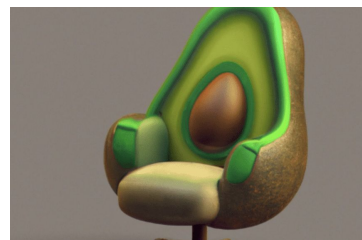
Profilage,
recommandation

Génération

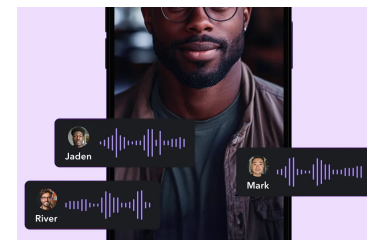
On génère de nouvelles données, à partir d'un prompt



Textes : agent,
chatbot...



Images : vidéo, clip,
publicité...



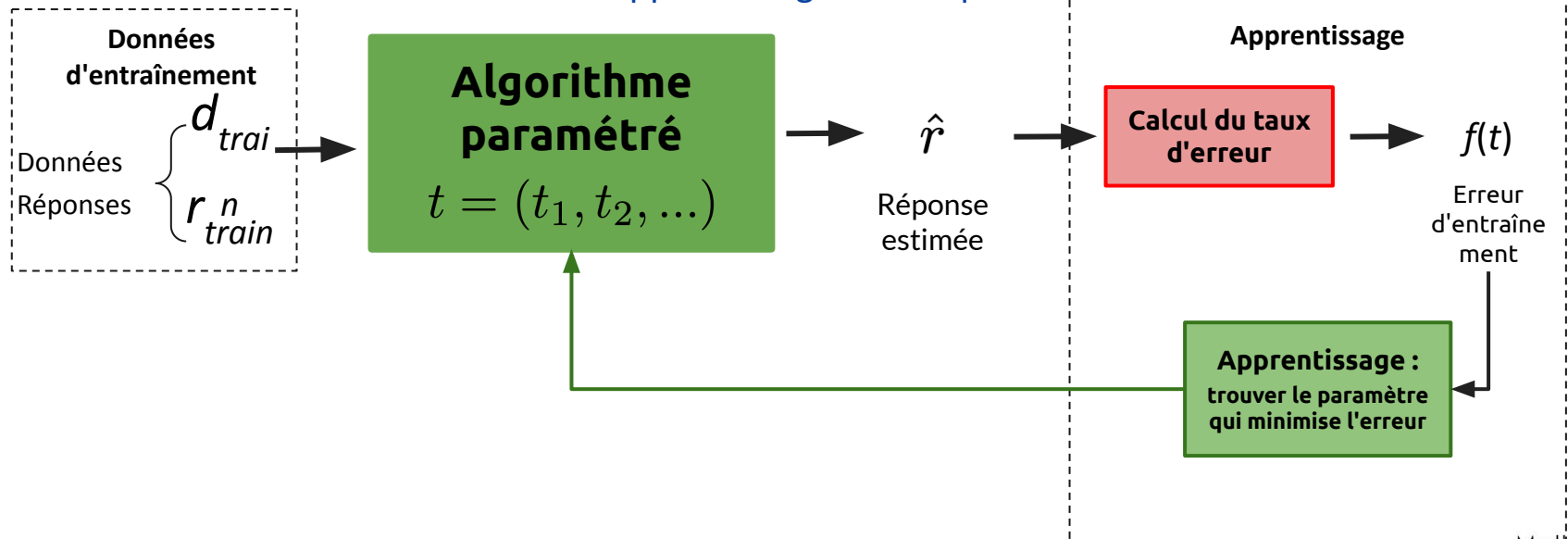
Sons : musiques, voix,
doublage...

Qu'est-ce que l'IA ? Algorithme d'apprentissage statistique

Un cadre commun



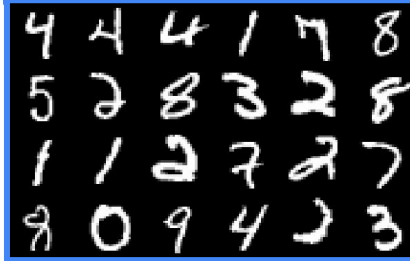
Apprentissage statistique



Des challenges d'IA pour Lycéens

Estimer la réponse r à une question

Quel chiffre écrit dans
l'image ?



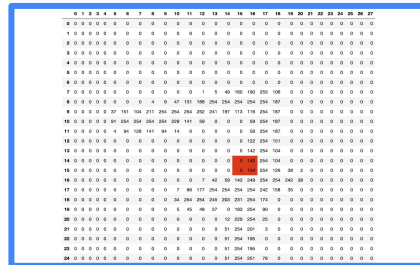
Le foetus est-il sain ou
en danger ?



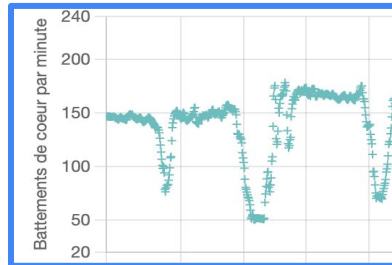
Un battement de coeur
est-il pathologique ?



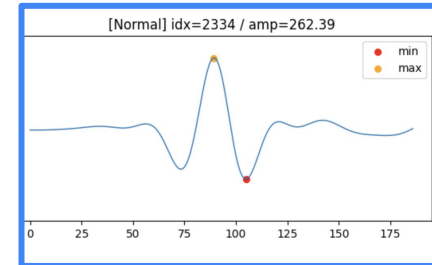
à partir d'une donnée d qui spécifie l'information disponible



Valeurs des pixels de
l'image



Rythme cardiaque

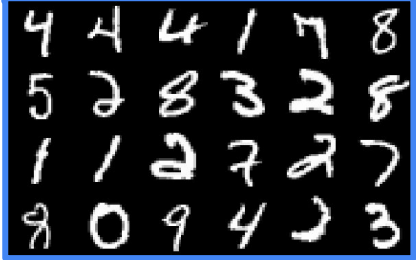


Électrocardiogramme

Des challenges d'IA pour Lycéens

Estimer la réponse r à une question

Quel chiffre écrit dans l'image ?



Le foetus est-il sain ou en danger ?



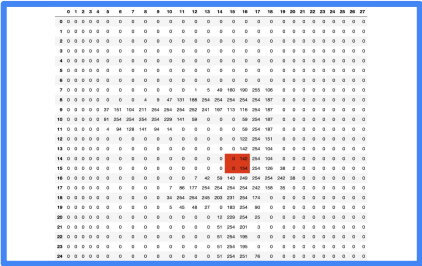
Corneille ou Molière a écrit ce texte ?



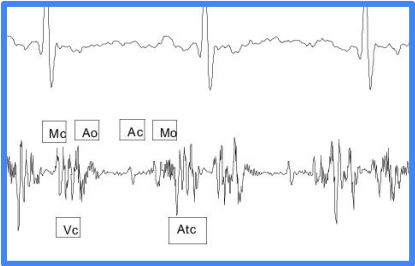
Décoder les chants des baleines



à partir d'une donnée d qui spécifie l'information disponible



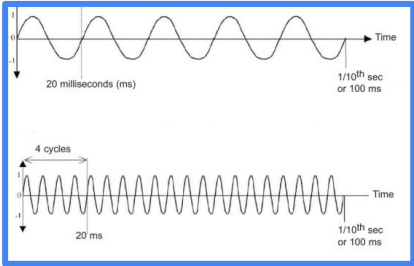
Valeurs des pixels de l'image



Électro-cardiogramme.

Je n'aurais rien à craindre, si tout le monde vous voyait des yeux dont je vous vois, et je trouve en votre personne de quoi avoir raison aux choses que je fais pour vous. Mon coeur, pour sa défense, a tout votre mérite,

Mots du texte



Enregistrement du chant

Comment un algorithme apprend à classer des objets

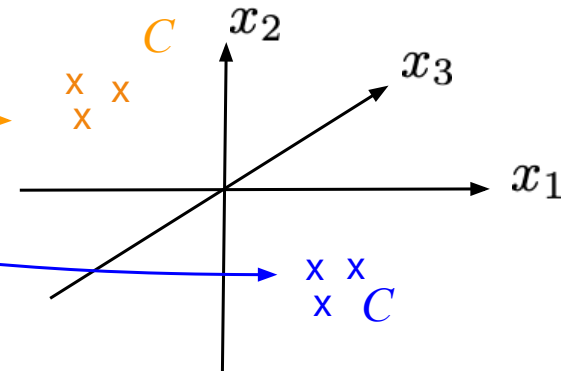
Pour classifier, trouver une représentation qui sépare les classes



- Ces images sont très différentes
- Chercher à apprendre **différences** et **ressemblances**
- Idée centrale : trouver des **caractéristiques** qui différencient les chats des chiens

Pour classifier, trouver une représentation qui sépare les classes

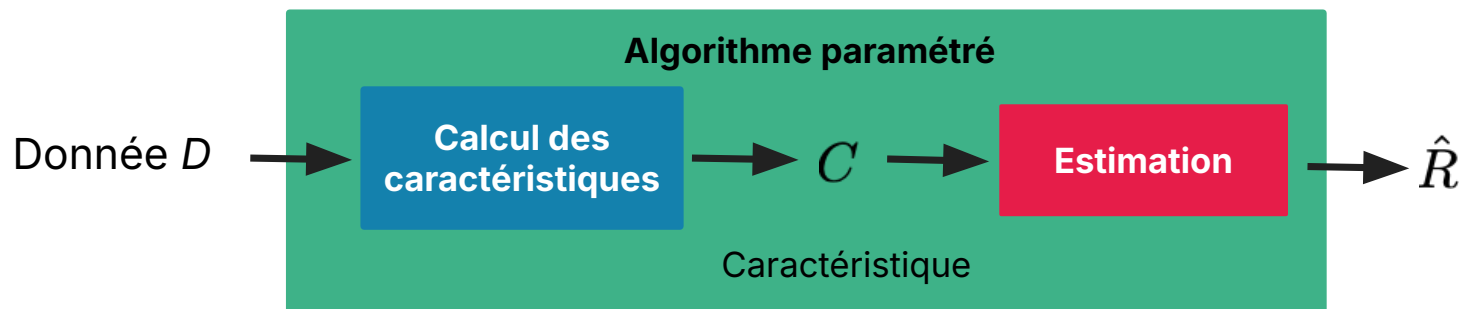
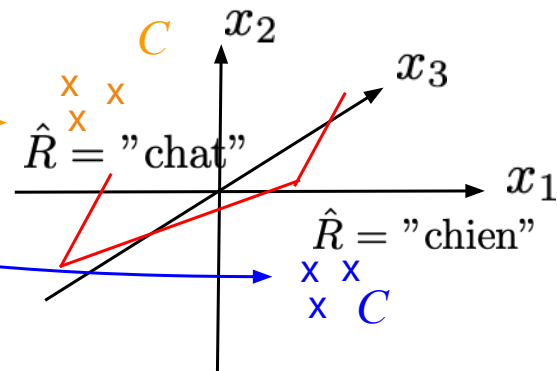
Caractéristiques $C = (x_1, x_2, \dots)$
similaires parmi les chats et parmi les chiens
et **différentes** entre les chats et les chiens.



Pour classifier, trouver une représentation qui sépare les classes



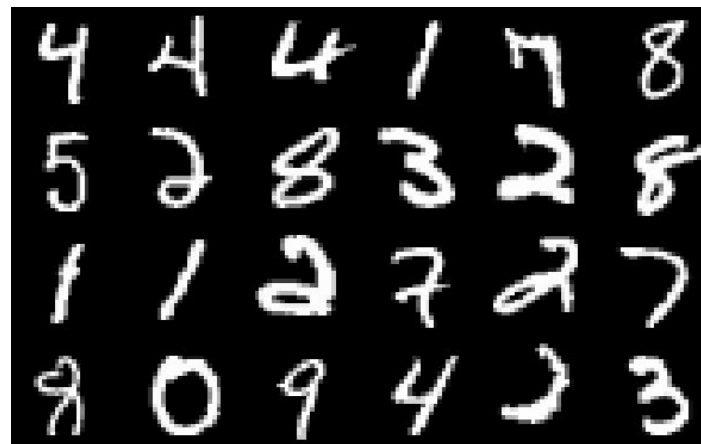
Caractéristiques $C = (x_1, x_2, \dots)$
similaires parmi les chats et parmi les chiens
et **différentes** entre les chats et les chiens.



Un problème fondateur : reconnaissance de chiffres manuscrits

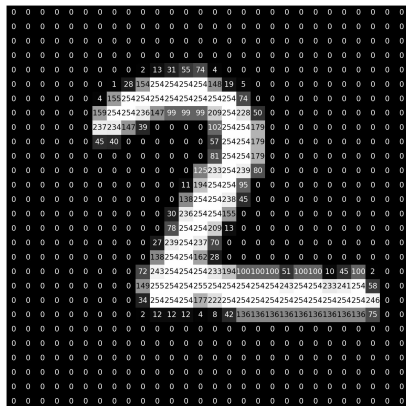
Usage : lire les codes postaux :

APPARTEMENT 25
ENTREE B RESIDENCE LESIRIS
3 BOULEVARD DU LEVANT
95220 HERBLAY

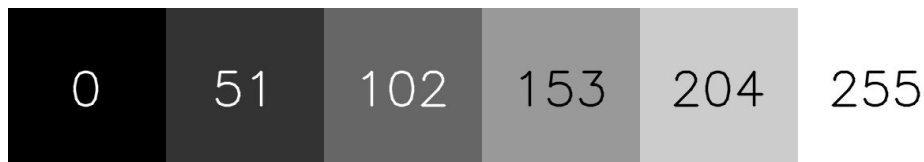


Quel est le chiffre r qui est écrit dans une image d ?

Données :

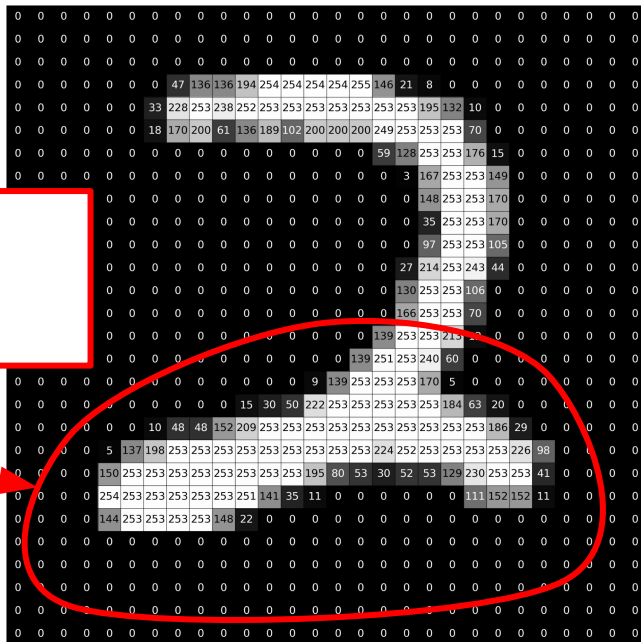


$$d = (d_1, d_2, \dots, d_{784})$$

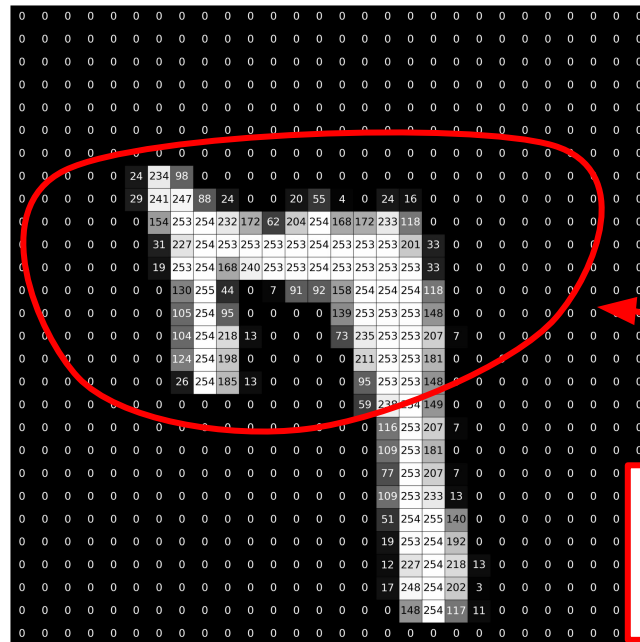


Comment trouver 2 caractéristiques

Beaucoup de pixels blancs partie basse



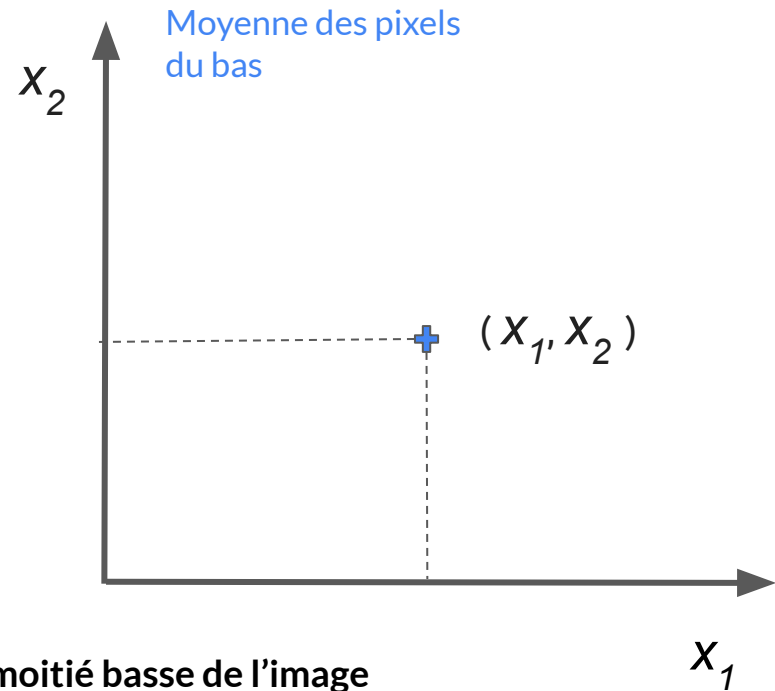
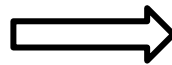
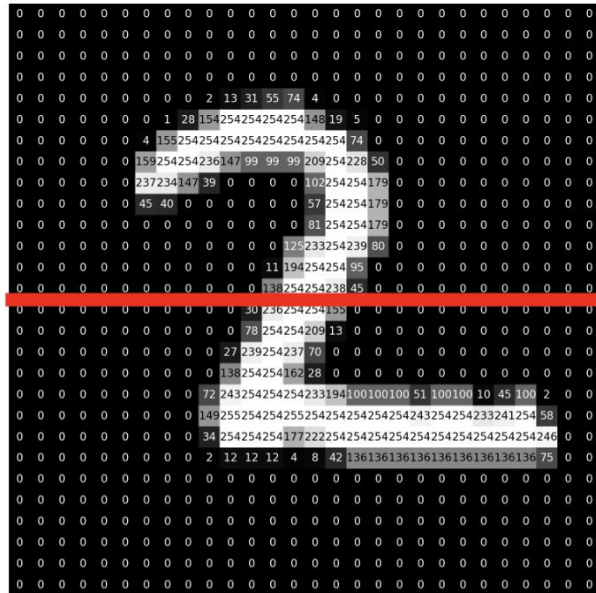
Beaucoup de pixels blancs partie haute



Questions :

- À partir des valeurs des pixels, comment *caractériser* un 2 plutôt qu'un 7 ?
- Trouver 2 nombres (caractéristiques) qui permettent de différencier un 2 d'un 7.

Exemples de 2 caractéristiques

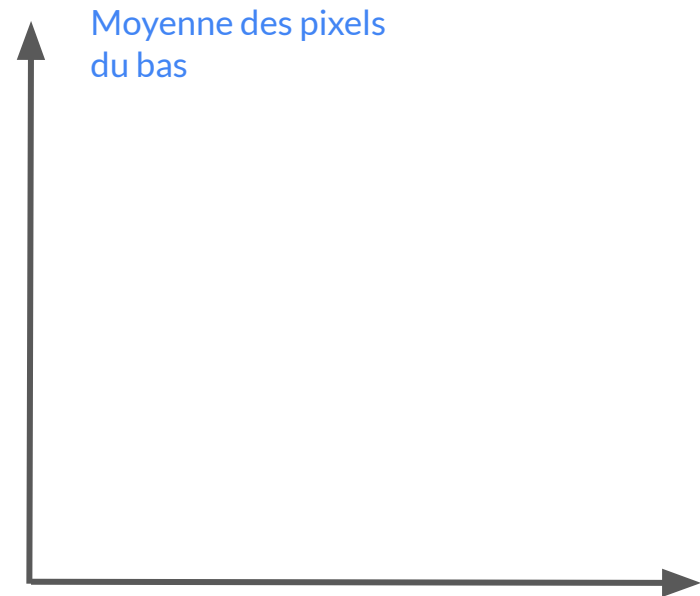
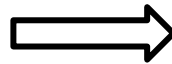
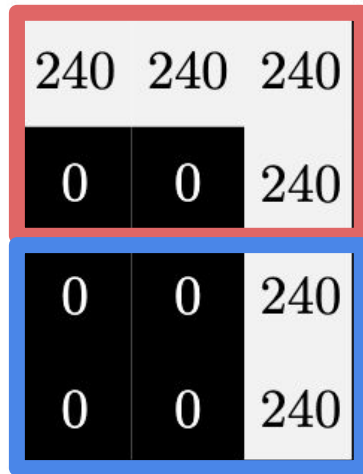


Moyenne des valeurs des pixels dans la moitié haute et dans la moitié basse de l'image

- Nombre facile à calculer pour un ordinateur
- Moyenne grande si beaucoup de pixels blancs, petite sinon

Moyenne des pixels
du haut

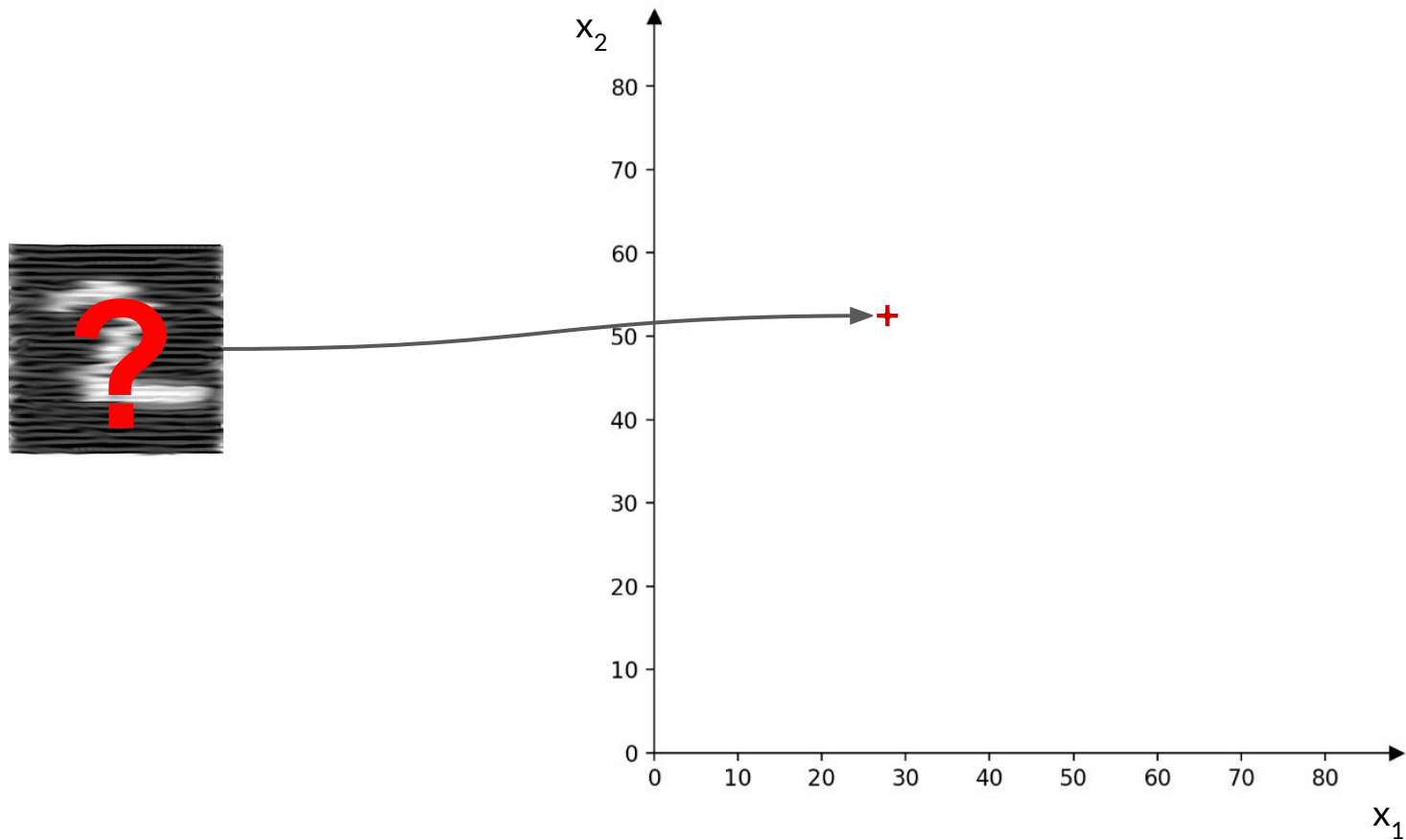
Exemples de 2 caractéristiques : Transposition niveau lycée



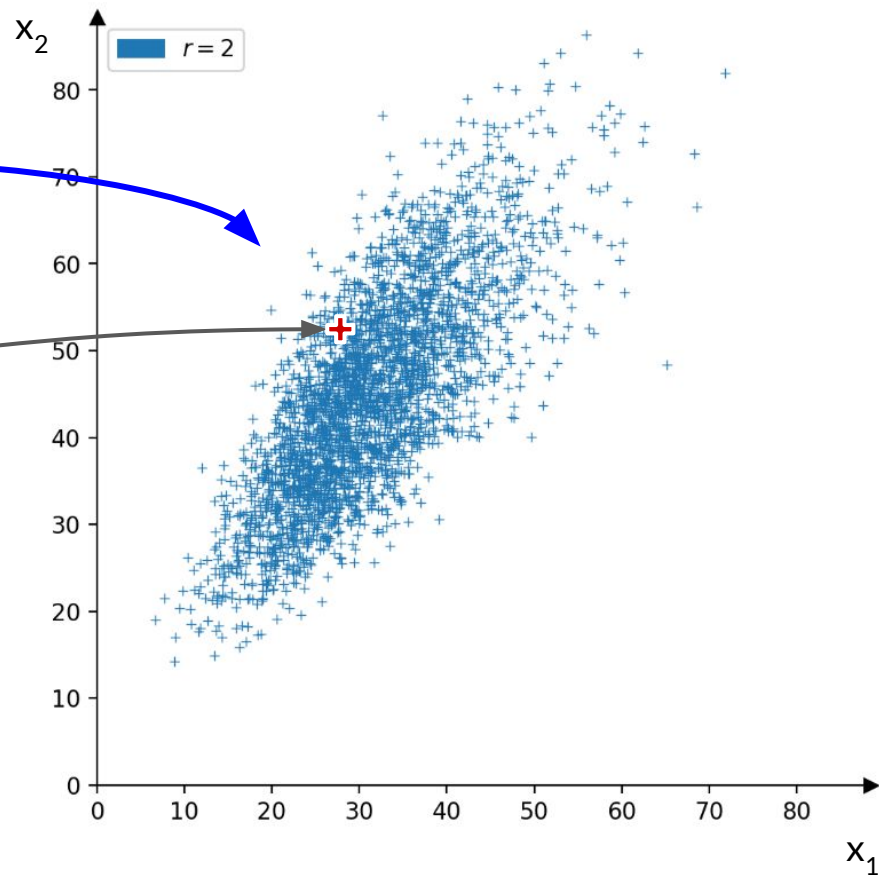
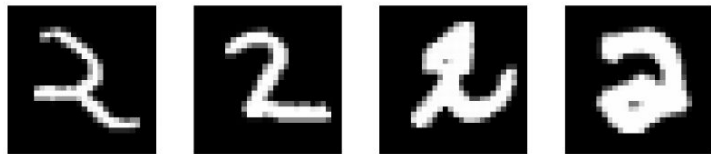
Quelles sont les caractéristiques de cette image du chiffre 7 ?

Remarque : $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

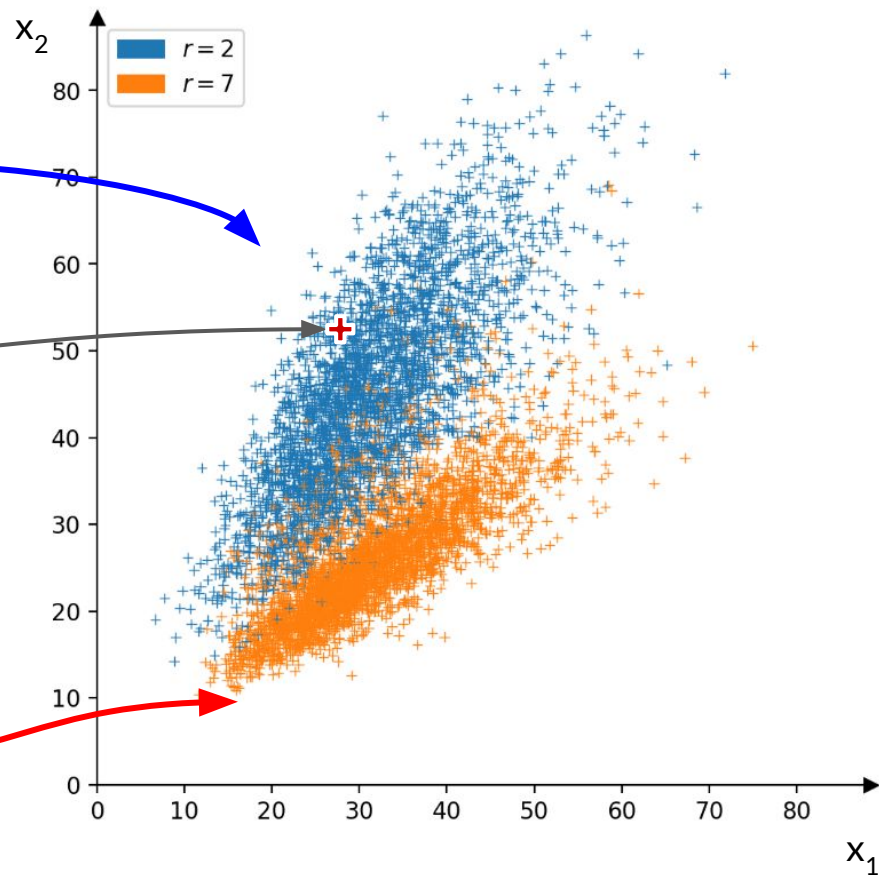
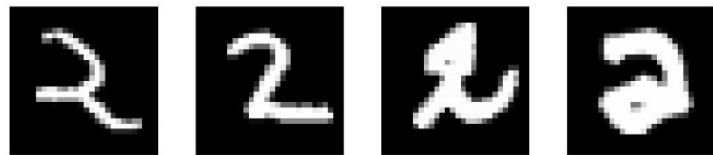
Utiliser les caractéristiques pour classer les images



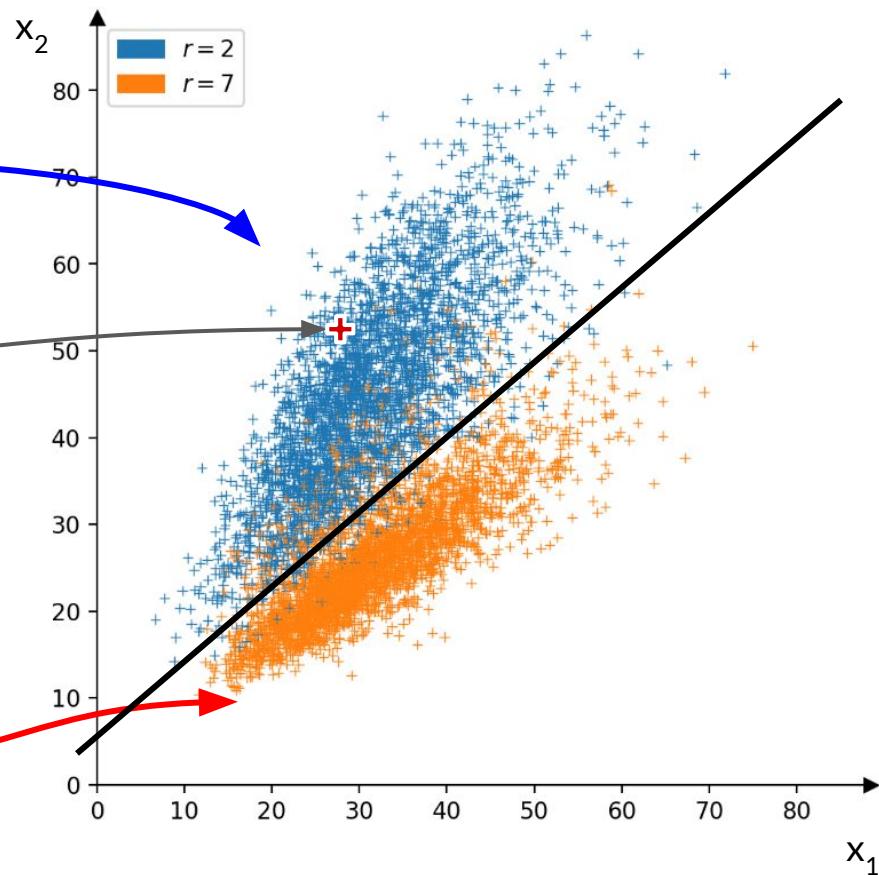
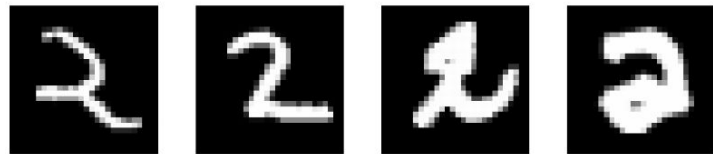
Utiliser les caractéristiques pour classer les images



Utiliser les caractéristiques pour classer les images



Utiliser les caractéristiques pour classer les images



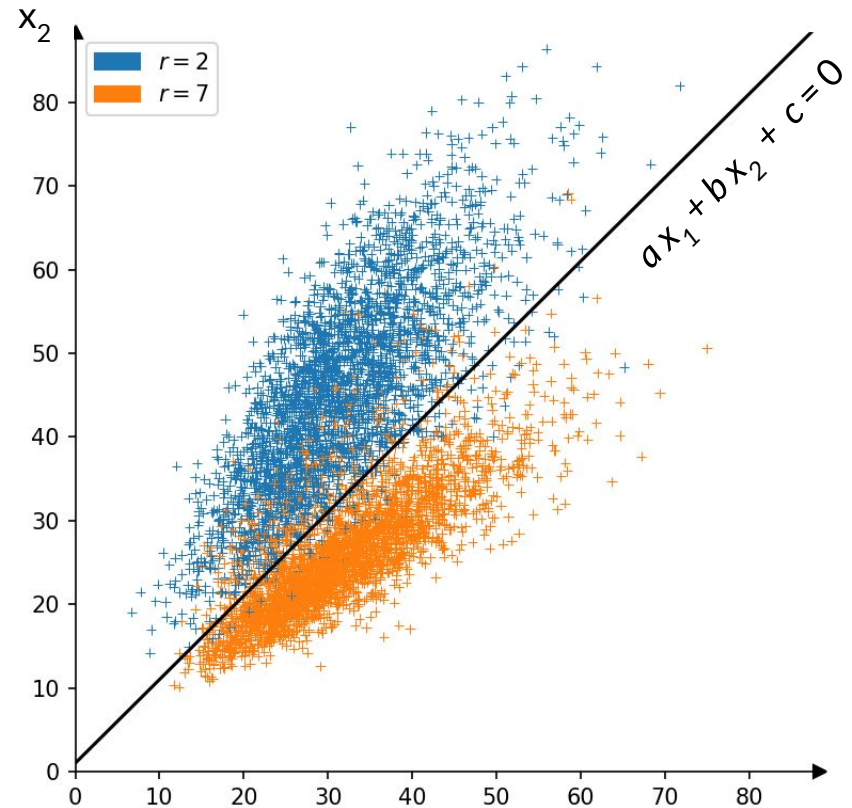
Modélisation - Équation de droite

Droite définie par une équation

$$D : ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Paramètres de la droite : $t = (a, b, c)$

Apprendre : trouver la liste de paramètres $t = (a, b, c)$ de la droite qui fait le moins d'erreurs sur ces exemples d'entraînement.



Modélisation - Équation de droite

Droite définie par une équation

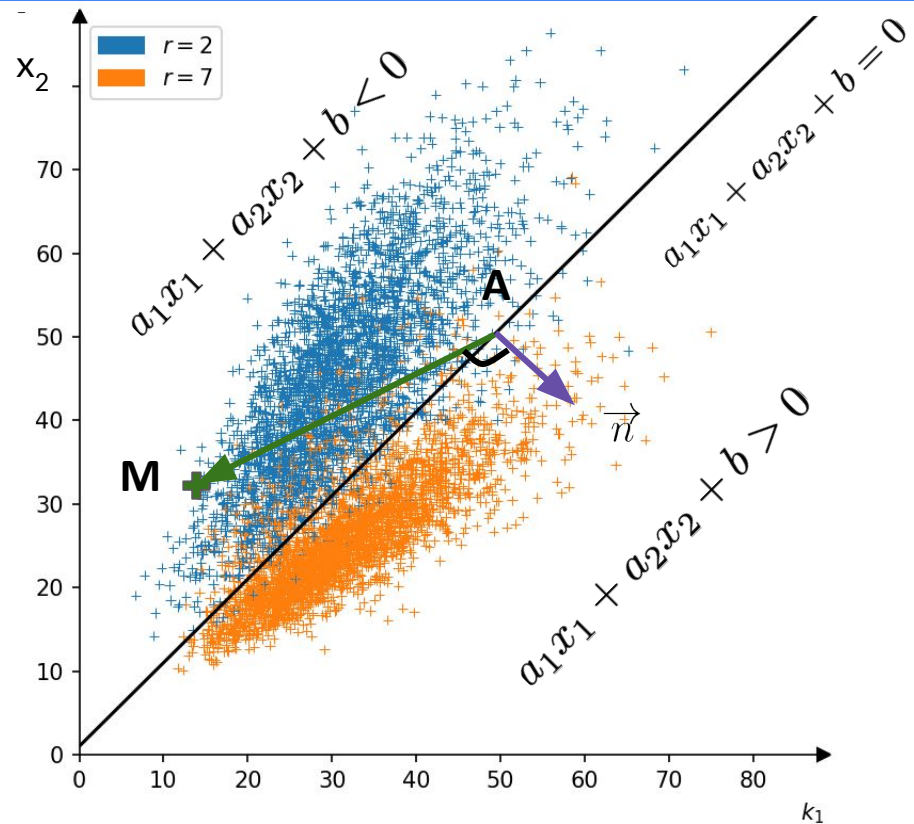
$$D : a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$$

Paramètres de la droite: $t = (a_1, a_2, b)$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} &= \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + b\end{aligned}$$

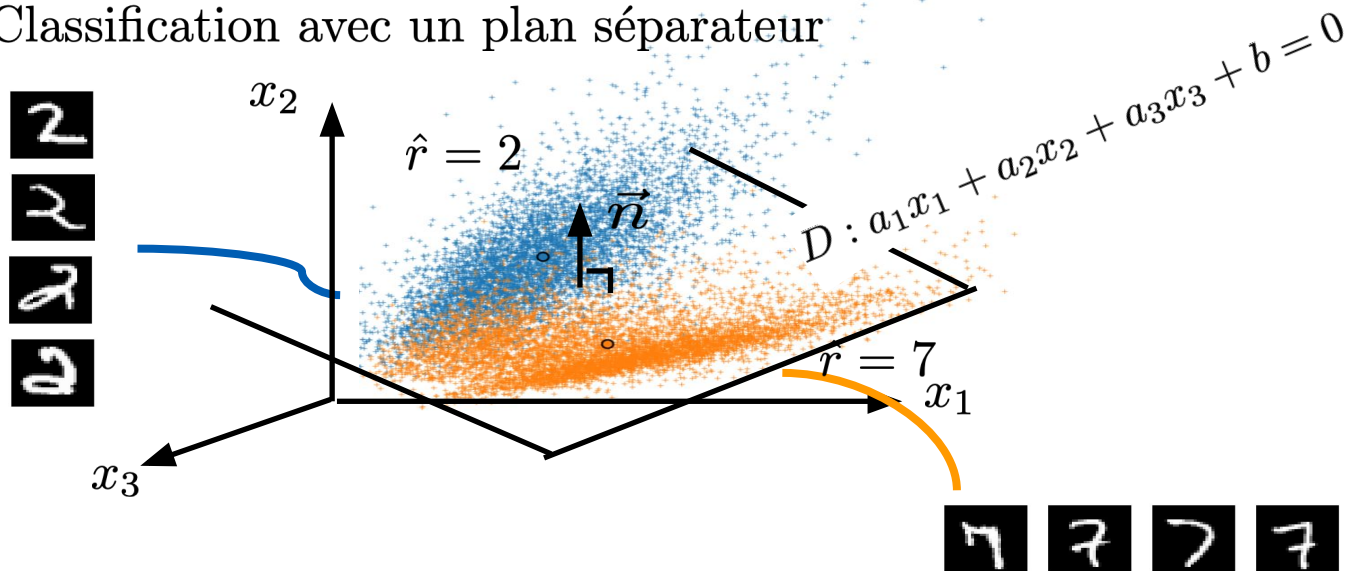
→ plus on est loin plus il est probable d'être dans la bonne classe



Géométrie de l'espace avec 3 caractéristiques

3 caractéristiques $x = (x_1, x_2, x_3)$ définissent un point dans le espace.

Classification avec un plan séparateur



Plan définie par une équation

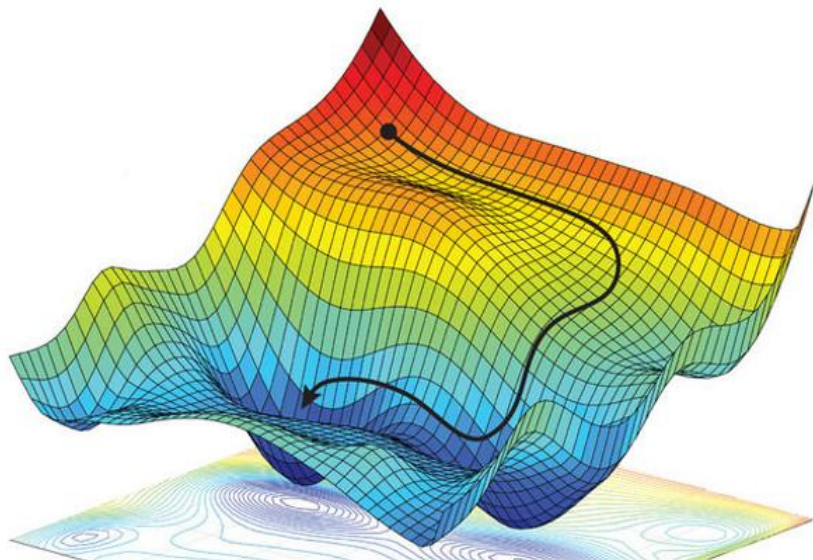
$$D : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$$

Paramètres du plan: $t = (a_1, a_2, a_3, b)$

Apprendre: trouver la liste de paramètres $t = (a_1, a_2, a_3, b)$ du plan qui fait le moins d'erreurs sur ces exemples d'entraînement.

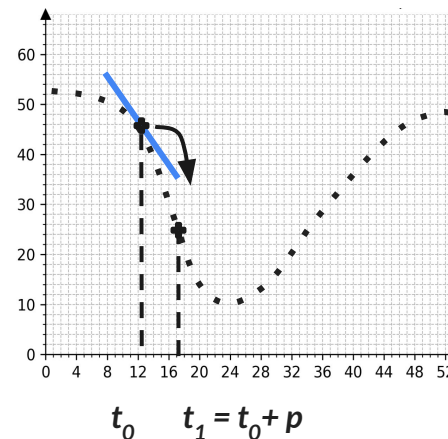
Comment trouver les paramètres pour minimiser l'erreur ?

L'erreur $f(t)$ dépend des paramètres $t = (m, p)$ de la droite



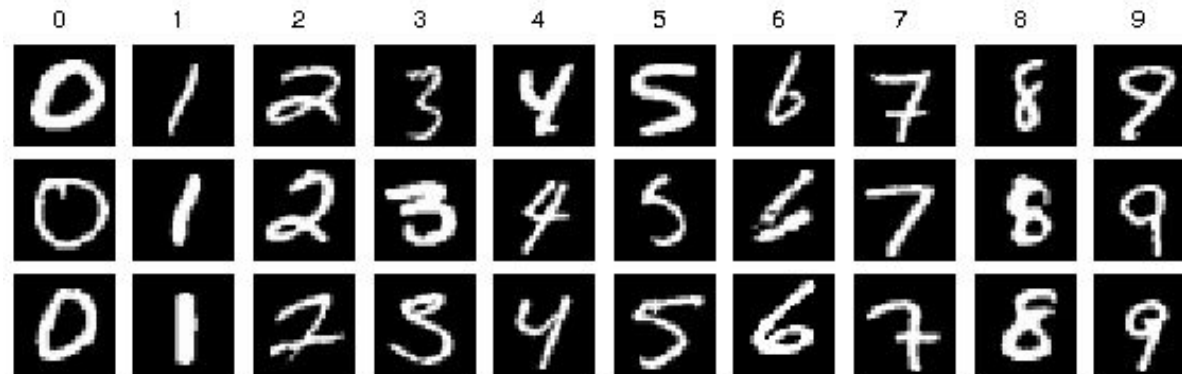
Descente de gradient : trouver itérativement le minimum de la fonction erreur

Pour le lycée : descente de dérivée sur un seul paramètre



**Au delà des maths du lycée : comment
généraliser à plus de classes ?
*Vers les réseaux de neurones***

Problème : classer les 10 chiffres

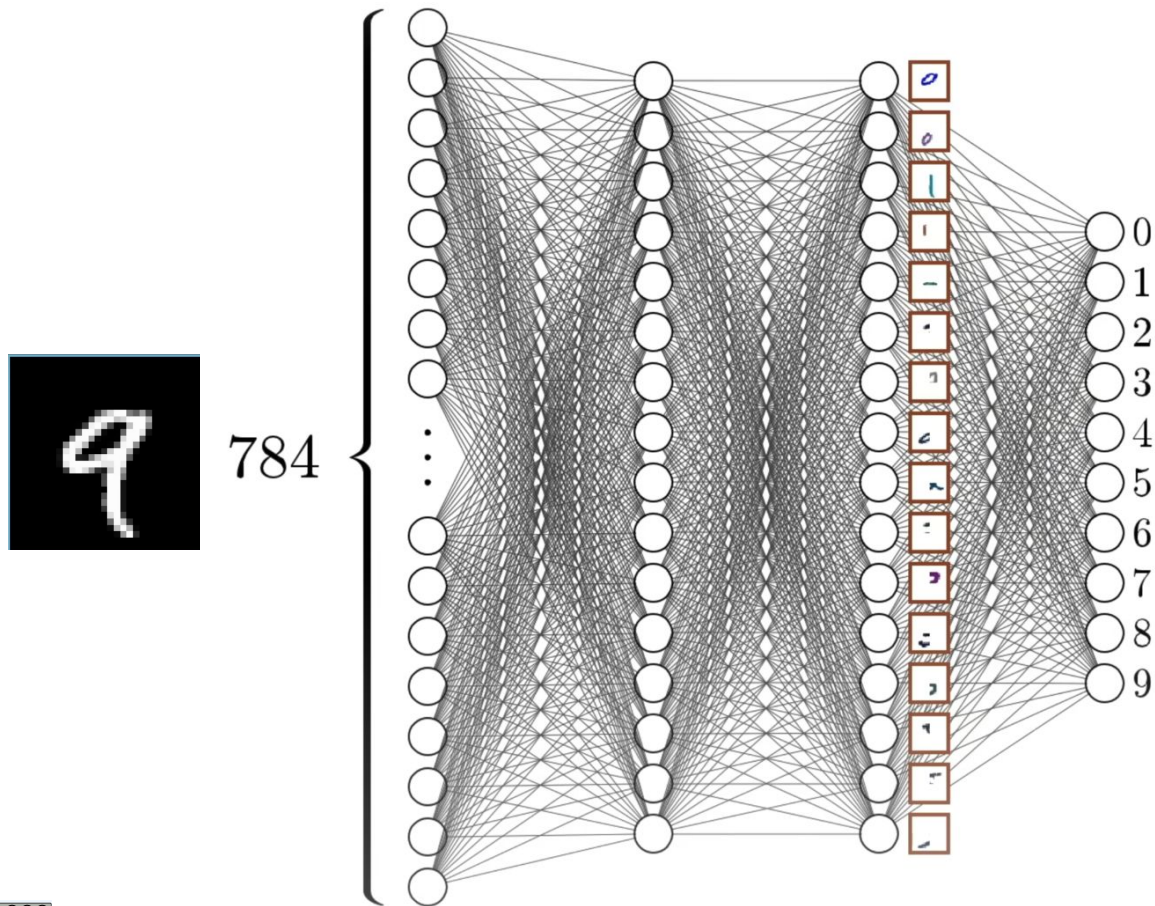


Chaque image d est représenté par une
liste de caractéristiques :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

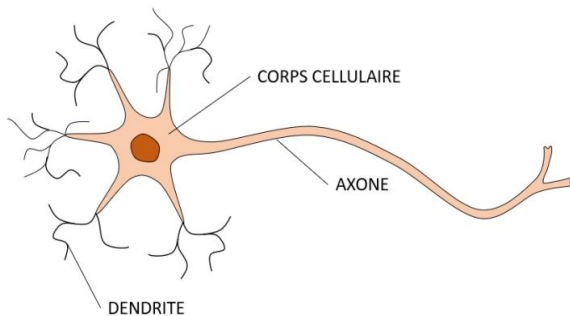
Classification : comment calculer l'estimation de la réponse ?

Architecture : un réseau de neurones



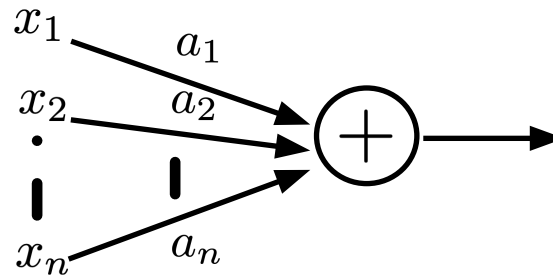
Idée : combiner les caractéristiques avec un neurone artificiel

Neurone biologique



Modèle de McCulloch-Pitts (1943)

Entrées



Sortie du neurone

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$$

Un neurone c'est une
frontière de décision
(hyperplan, droite en 2d)

Poids
(paramètres)

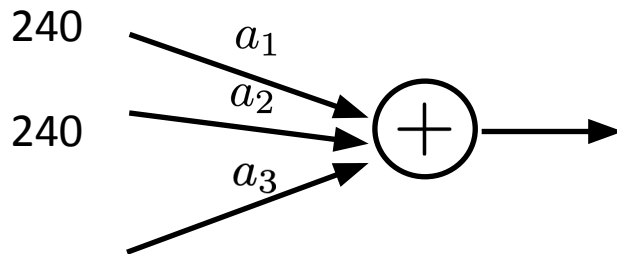
$$t = (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$$

Exemple : avec trois entrées

*On veut un neurone dont la sortie est positive si l'image est un 7,
et négative si c'est un 1*

$$t = (a_1, \dots, a_3, b)$$

240	240	240
0	0	240
0	0	240
0	0	240



Sortie du neurone

$$a_1x_1 + \dots + a_3x_3 + b$$

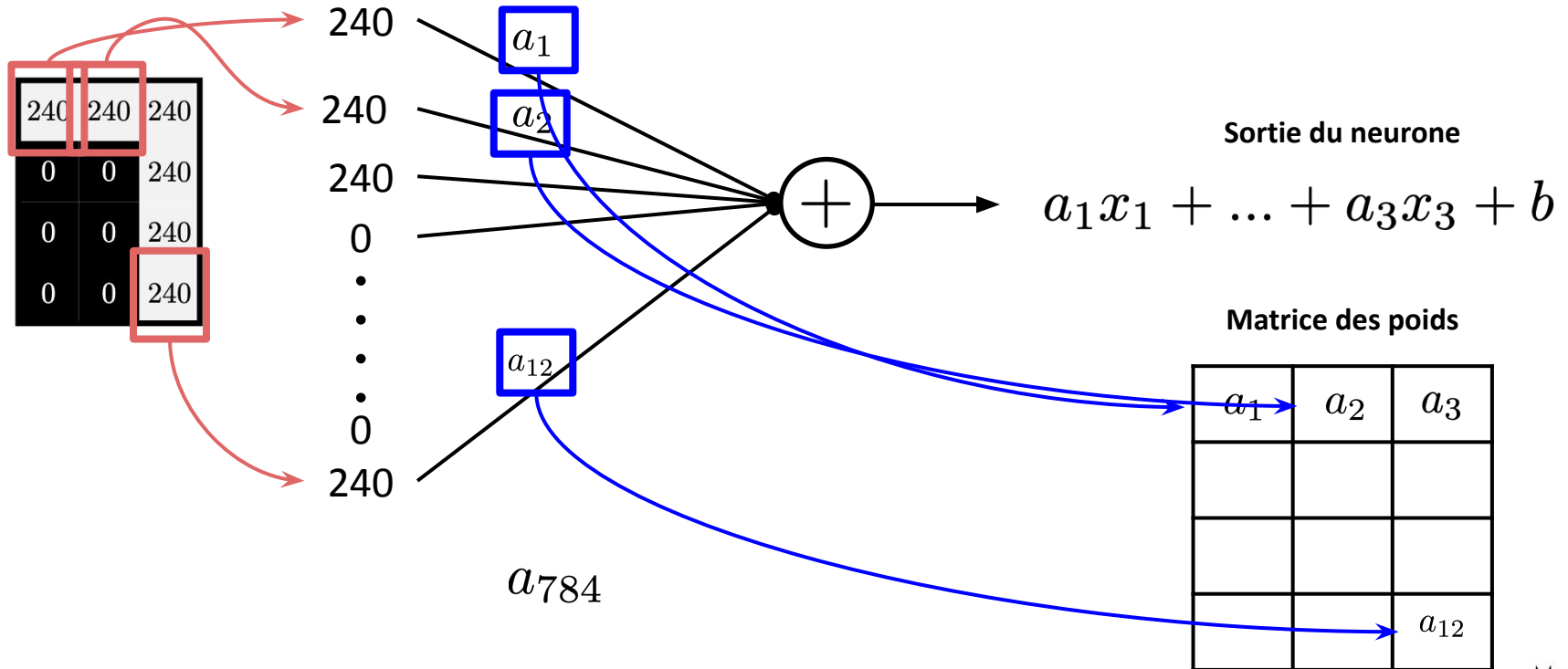
0	234	0
0	234	0
0	234	0
0	234	0

Avec un t arbitraire : $t = (1, 1, 1, -10)$

Un meilleur t : $t = (\dots, \dots, \dots, -10)$

Exemple : un neurone à 12 entrées pour les mini images

*On veut un neurone dont la sortie est positive si l'image est un 7,
et négative si c'est un 1*



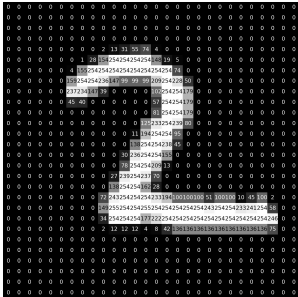
Exemple : reconnaître un 2 d'un 7 avec un neurone

Valeur pixel 1 →

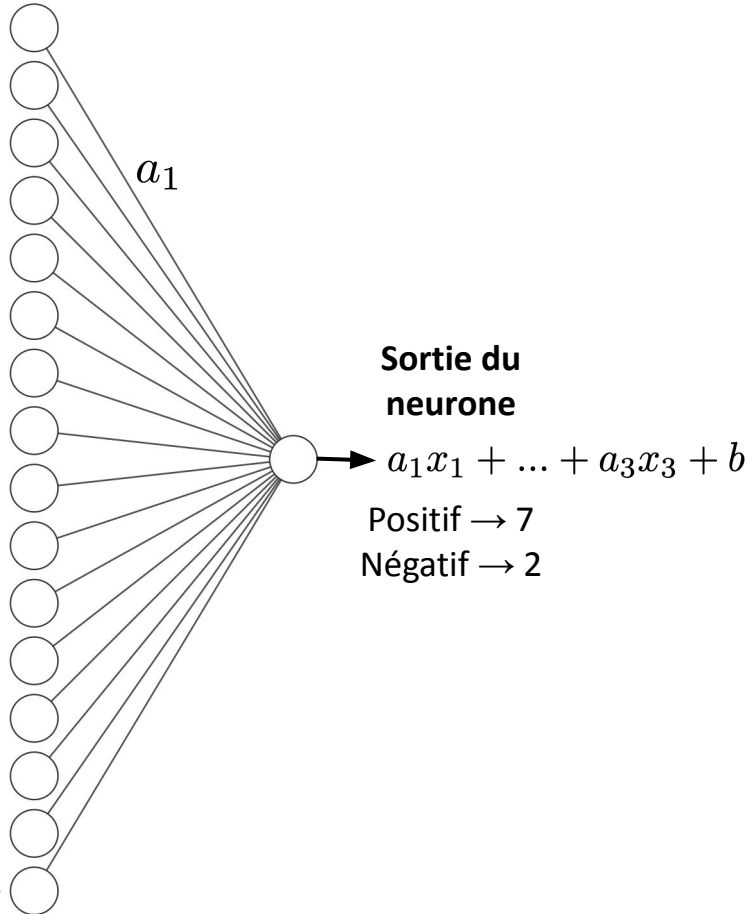
Valeur pixel 2 →

Valeur pixel 3 →

28x28 = 784 pixels



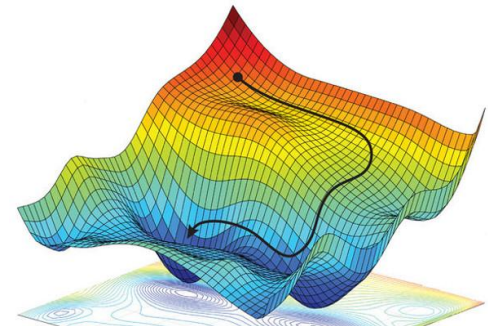
Valeur pixel 784 →



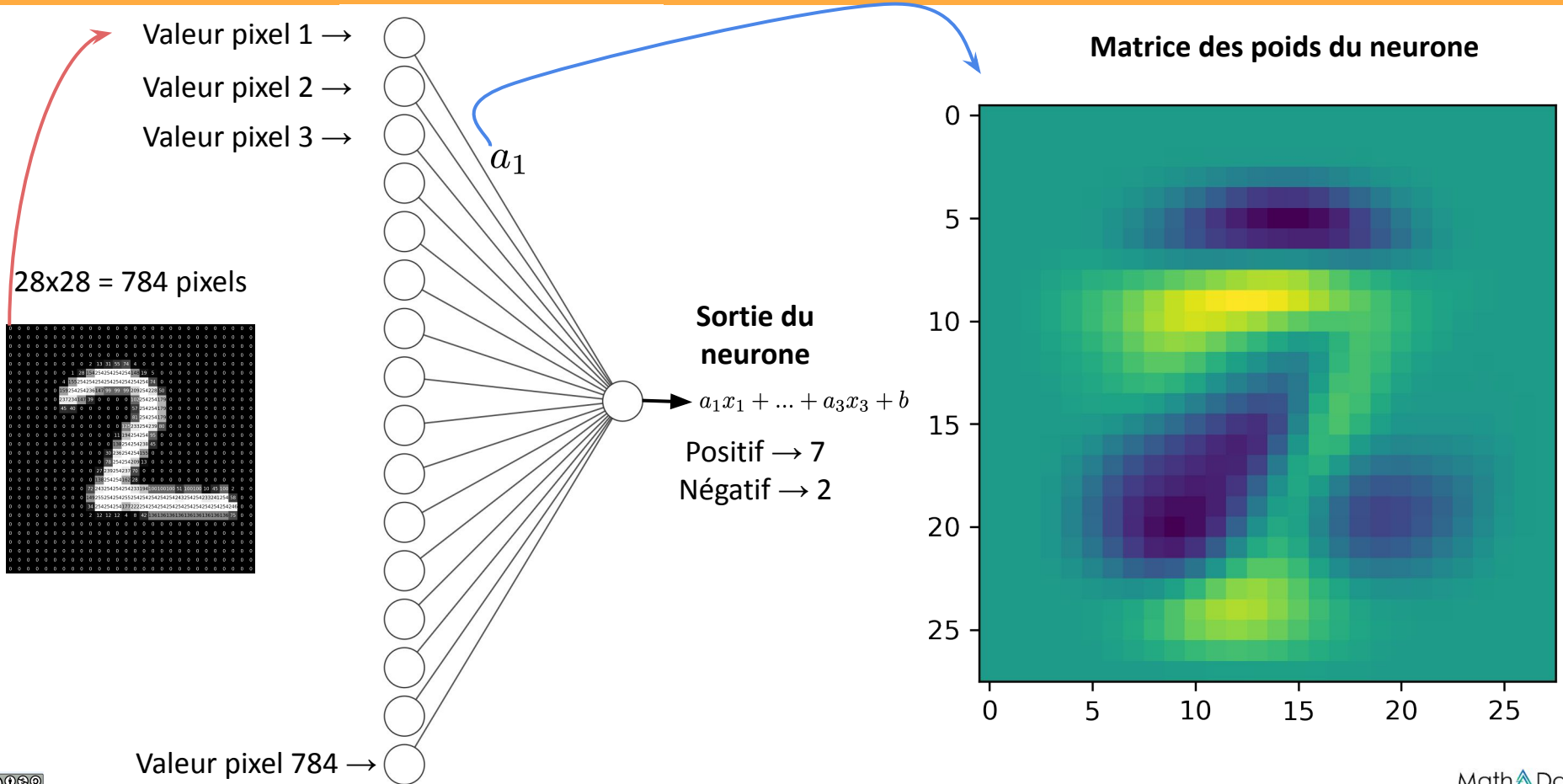
Matrice des poids du neurone

a_1	a_2	a_3		
				a_{784}

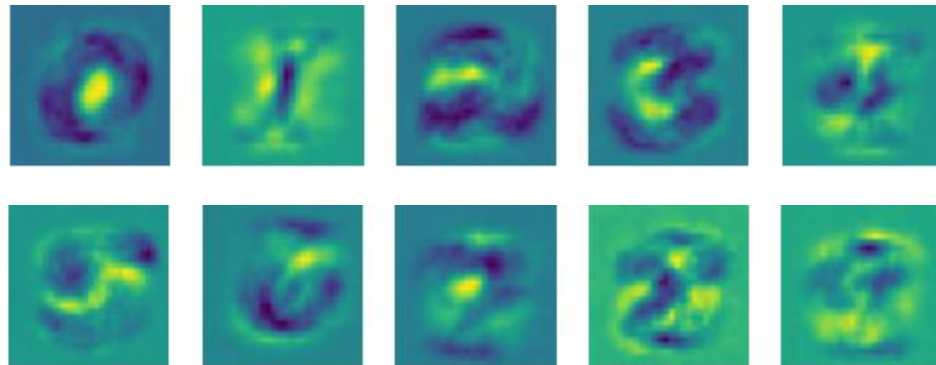
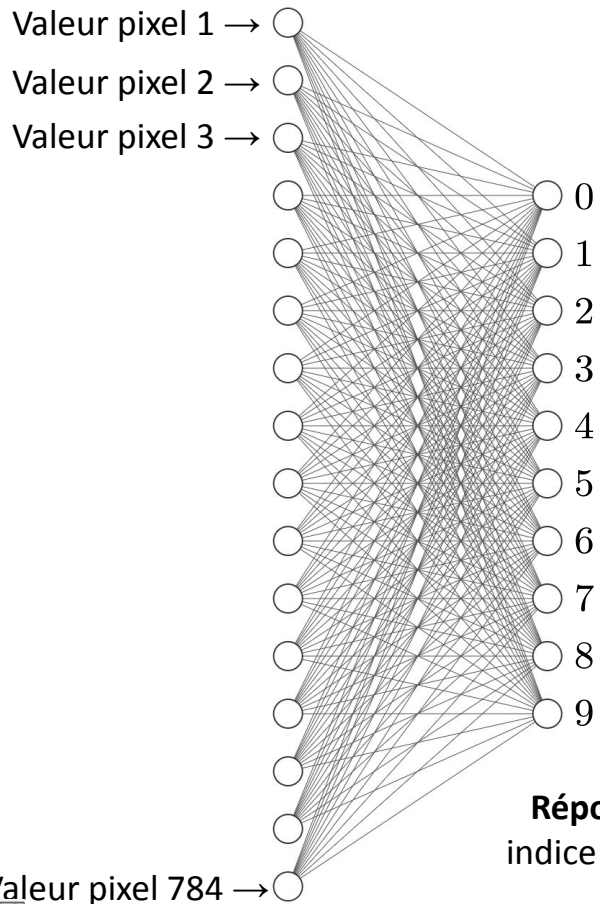
Cette fois : poids appris



Exemple : reconnaître un 2 d'un 7 avec un neurone



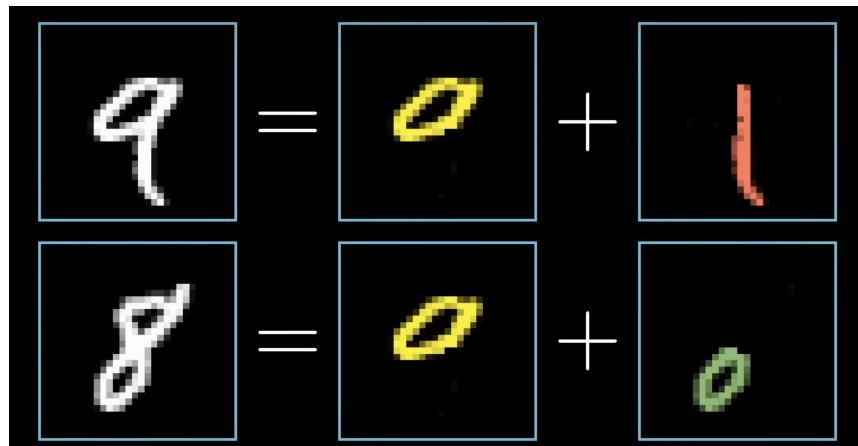
Exemple : reconnaître les 10 chiffres



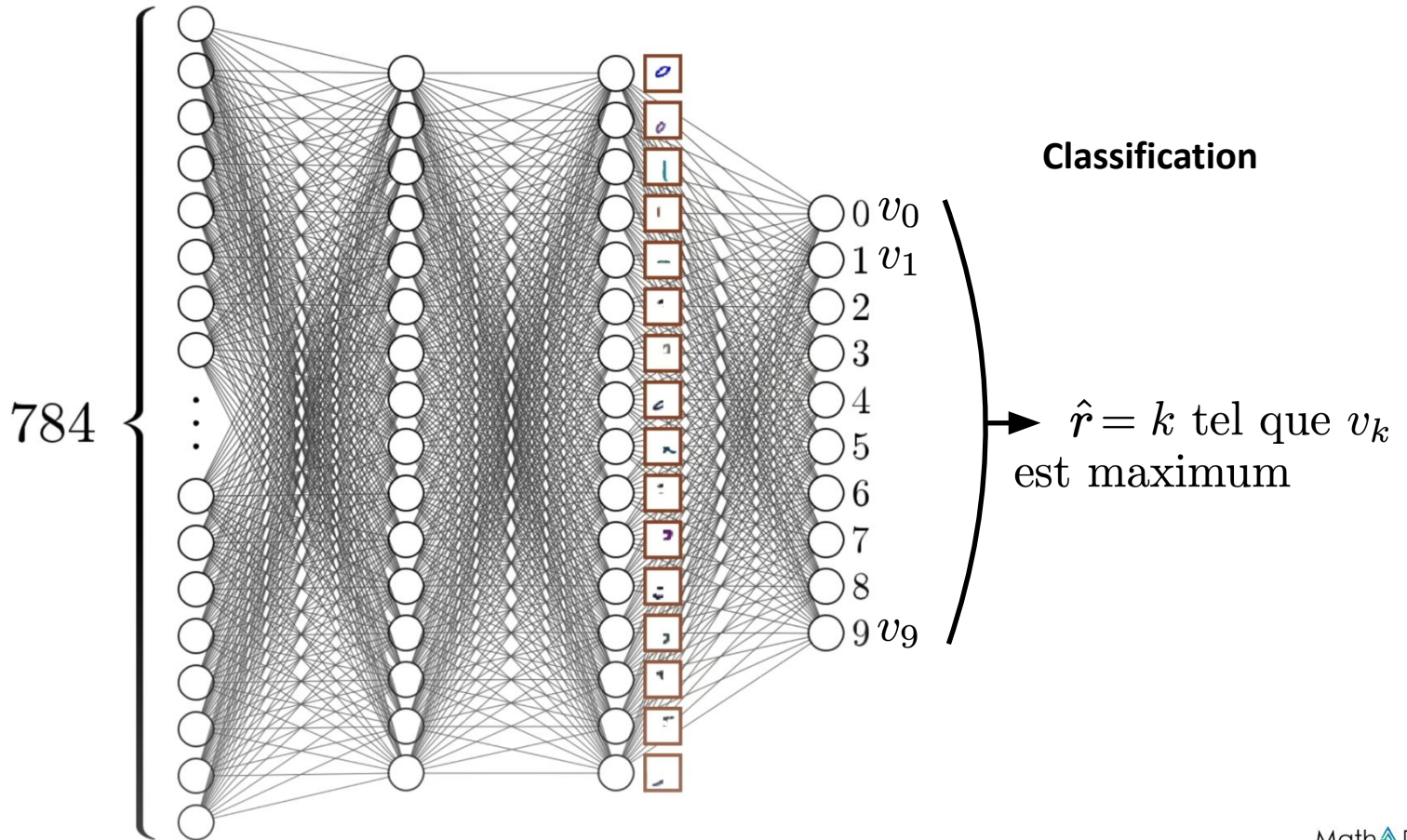
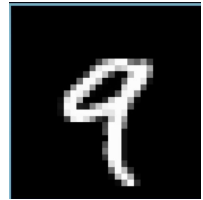
Réponses du réseau de neurones :
indice du neurone qui a la plus grande
sortie

Comment décomposer en calcul plus simples

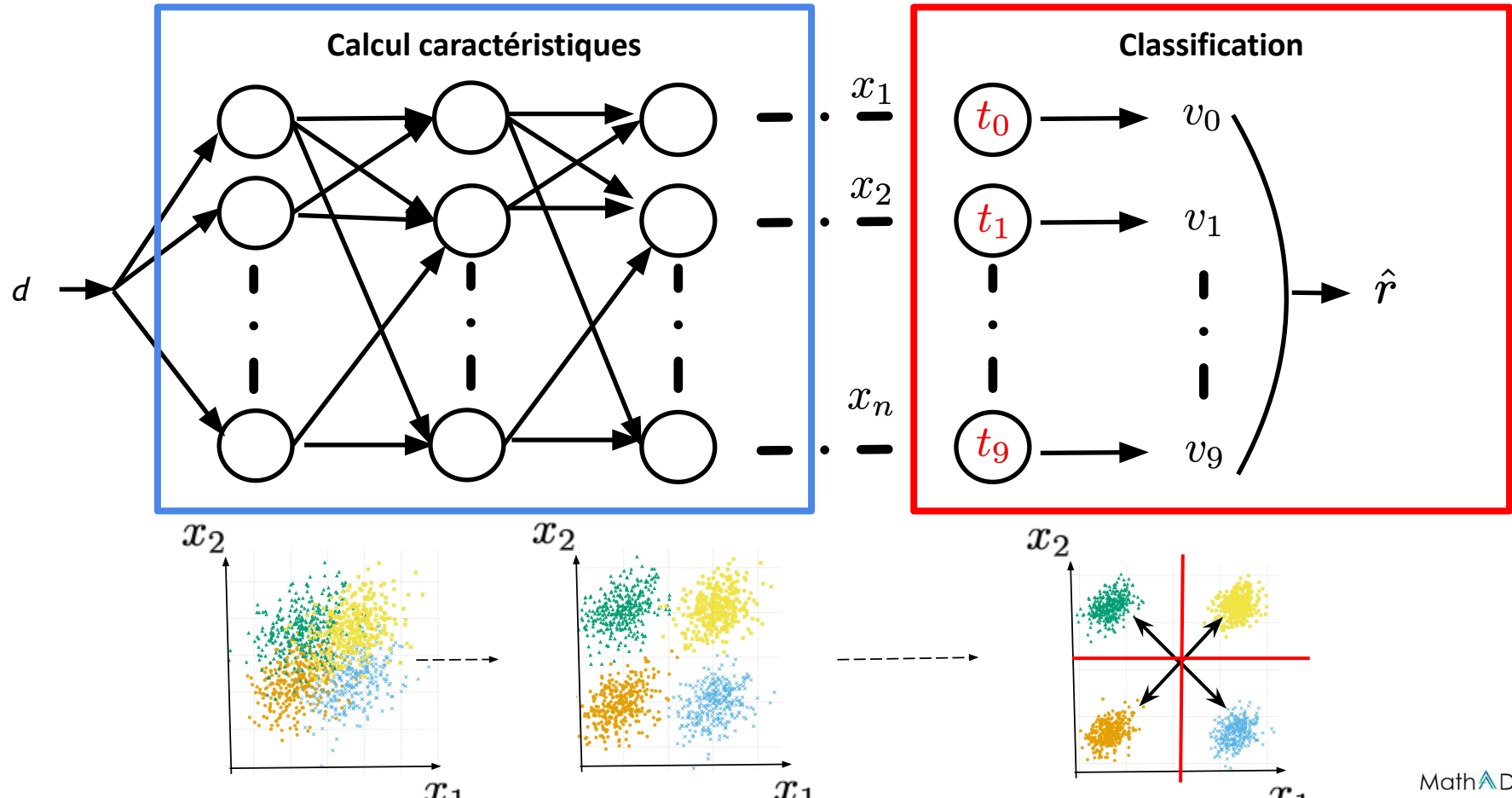
Proposition de décomposition “humaines” : décomposer la reconnaissance d’un chiffre



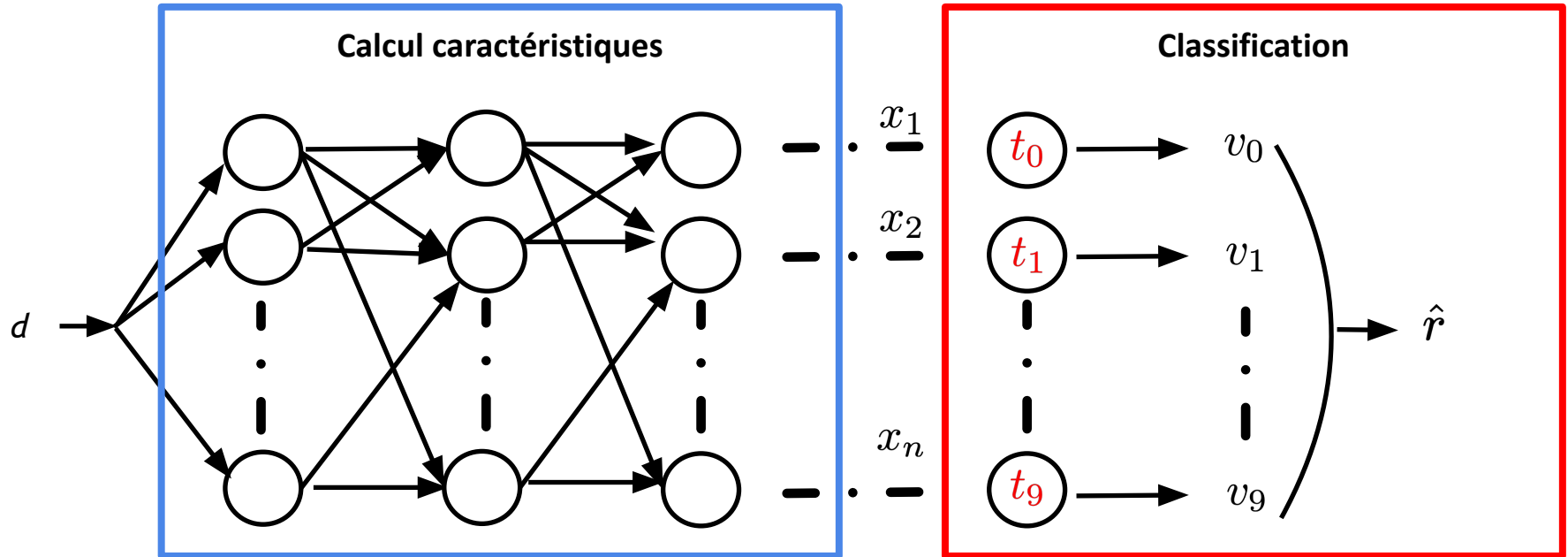
Augmenter la profondeur du réseau



Réseau de neurones profonds : apprendre les caractéristiques



Réseau de neurones profonds : apprendre les caractéristiques



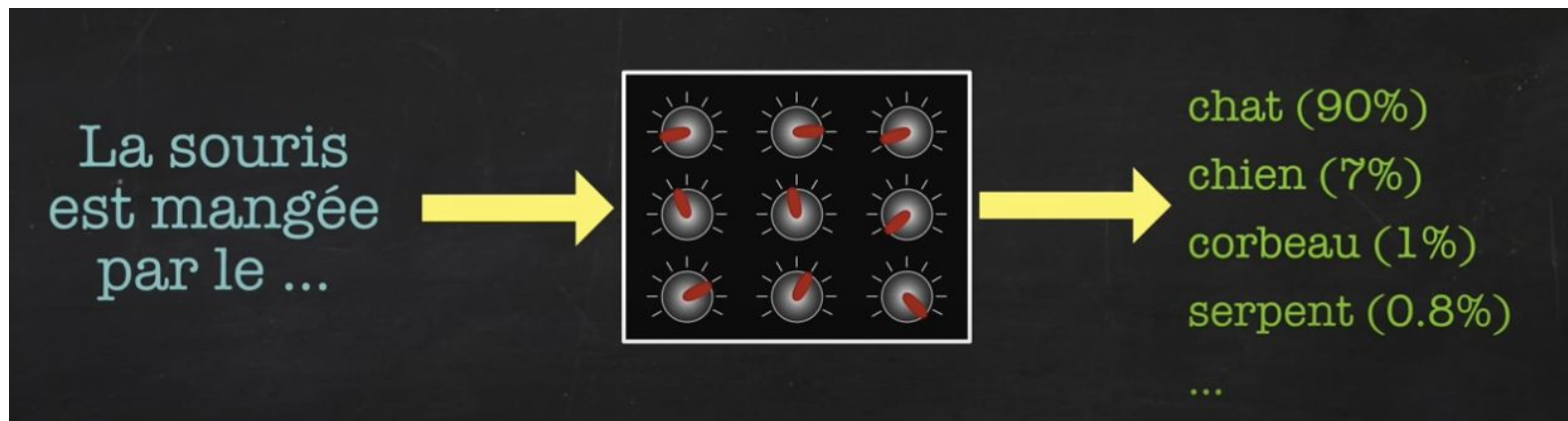
Exemple réel (ChatGPT4)

- Plus de 1 000 milliards de paramètres
- entraîné sur toutes les données d'Internet

→ très grand nombre de **paramètres à apprendre**, donc besoin de **beaucoup de données**

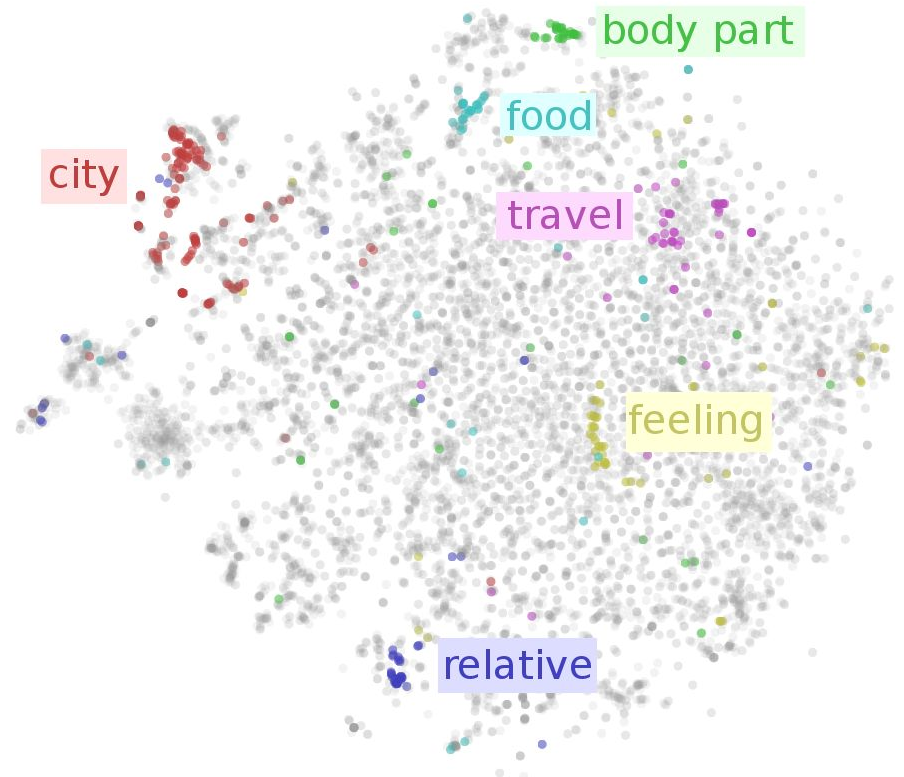
Modèles de langage

Question: *“Quelle est le prochain mot r le plus probable conditionnellement au prompt et aux mots déjà générés ?”*



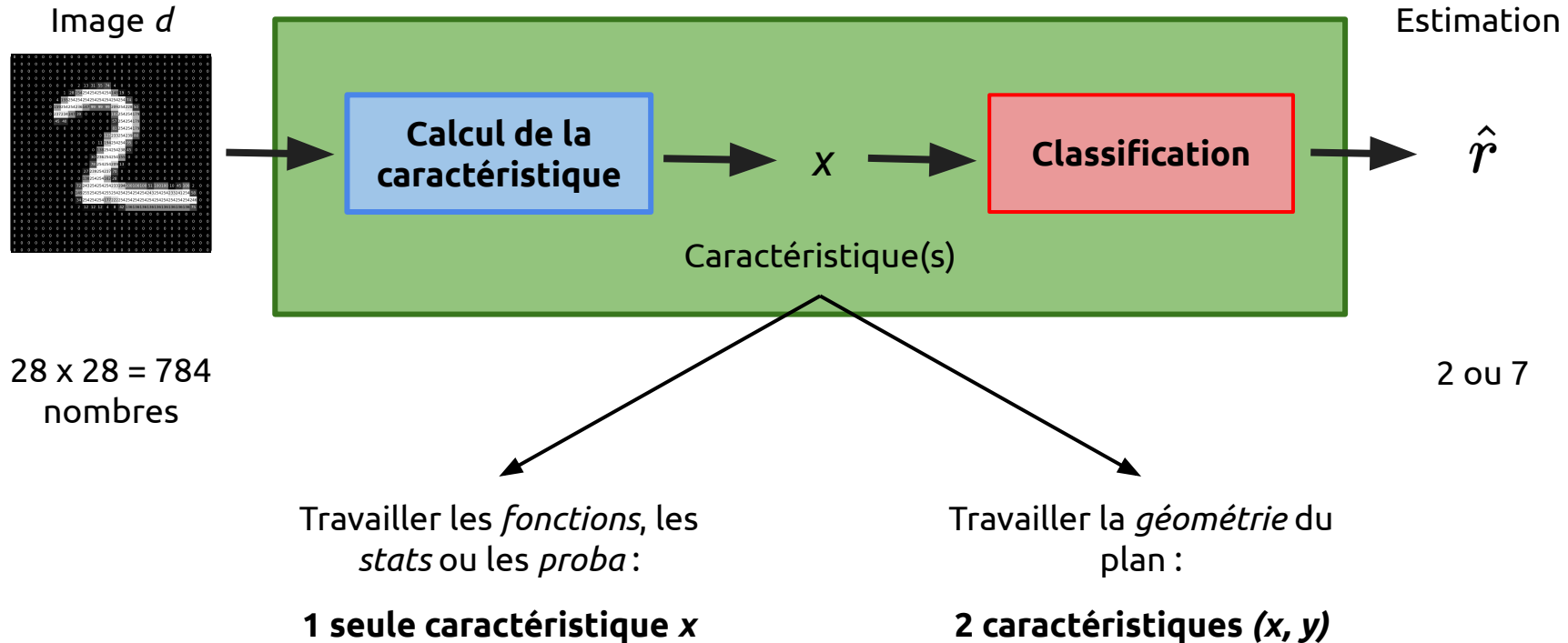
Modèles de langage : représentation sémantique

Un LLM trouve une représentation qui sépare les mots selon leur sens dans les phrases

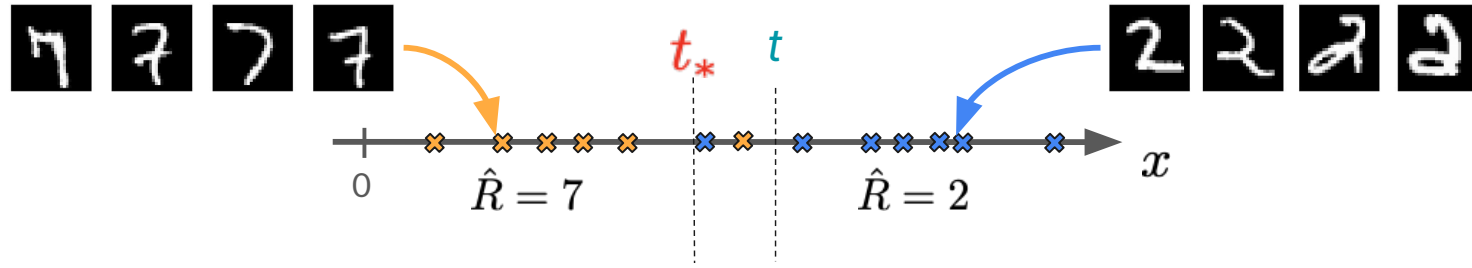


Bilan : des principes mathématiques qui couvrent les maths du lycée

Structure de base : quelques caractéristiques simples

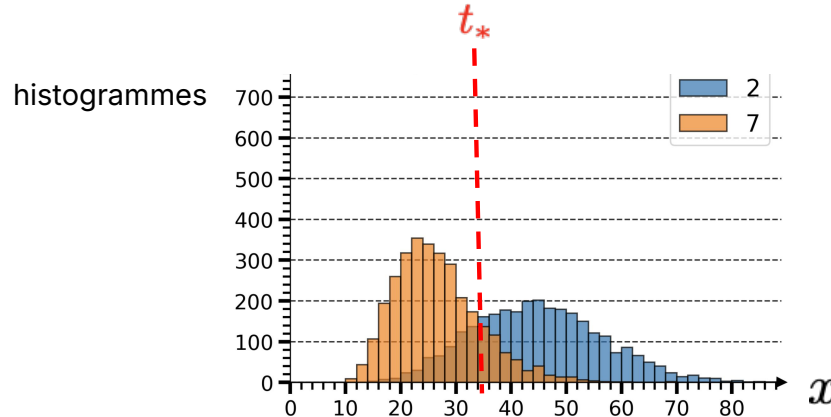


Classification avec une caractéristique → Analyse de fonction ou Statistiques

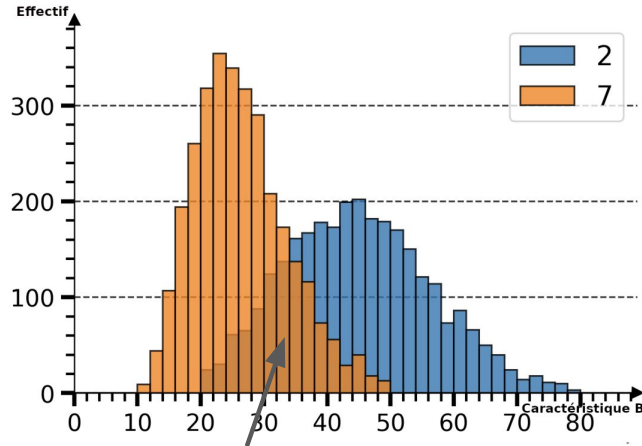
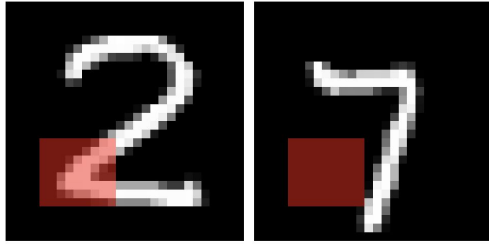


Apprentissage : chercher t pour minimiser $f(t)$

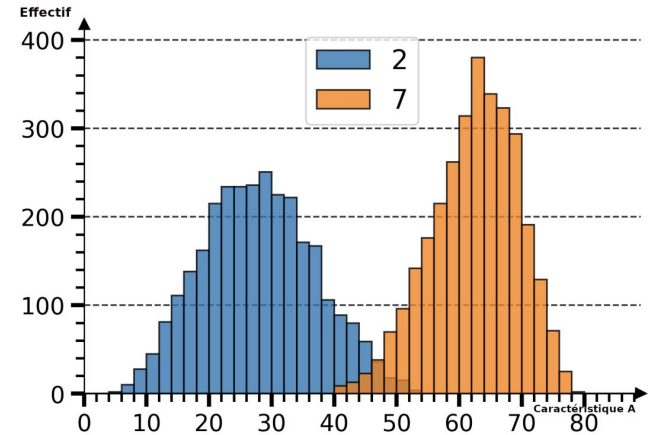
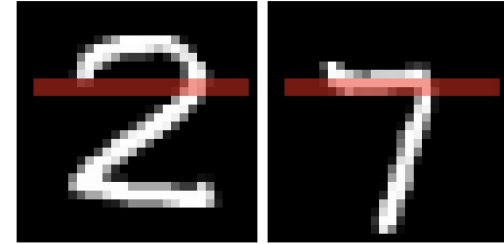
Statistiques



Trouver une meilleure caractéristique → Statistiques



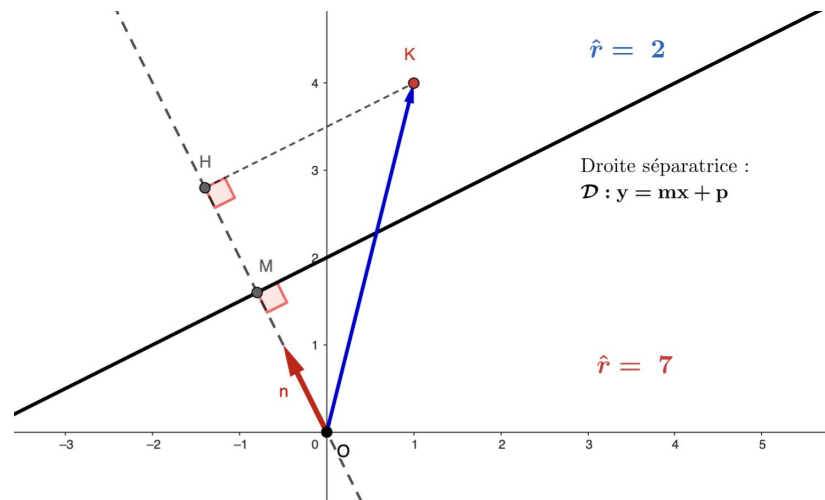
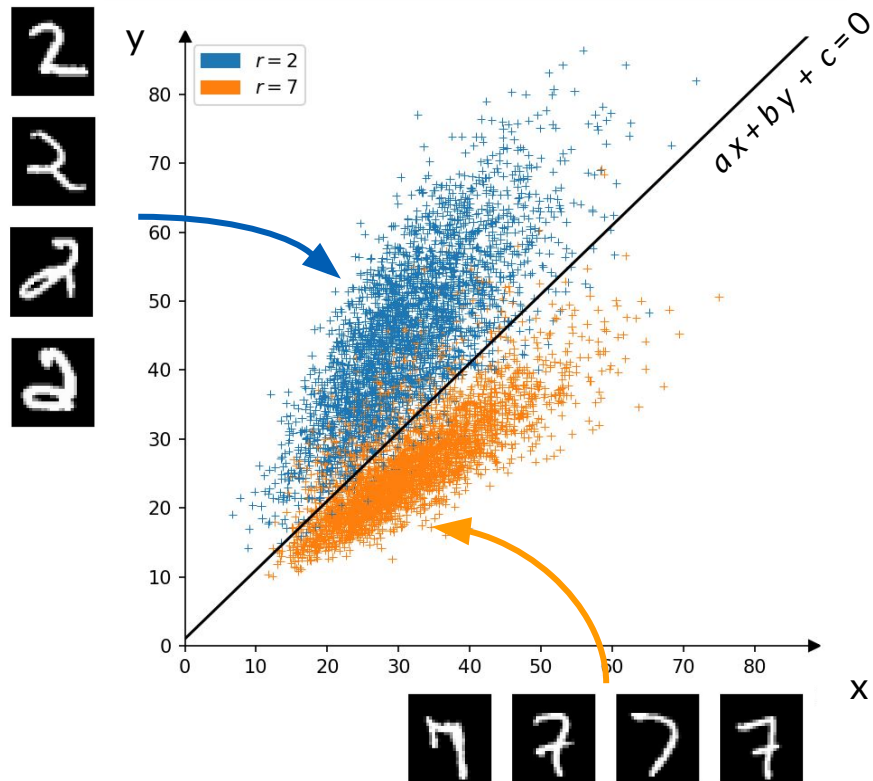
Erreur minimum = surface de recouvrement
des histogrammes



Distributions mieux séparées



2 caractéristiques → géométrie du plan

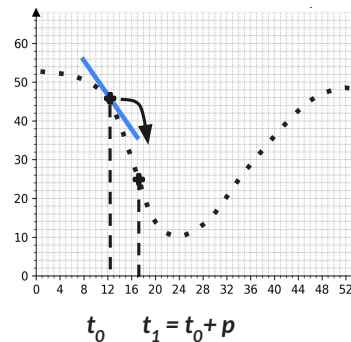
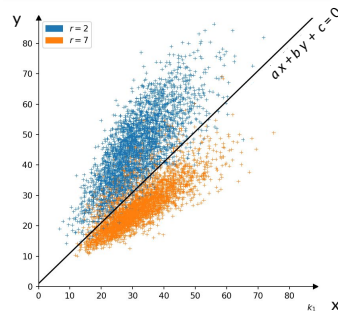
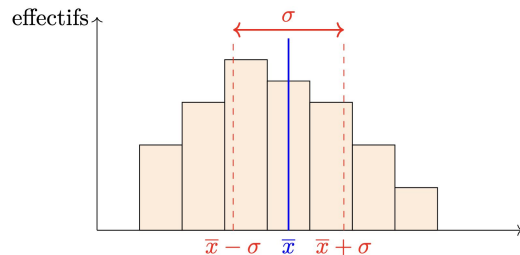


Un découpage en chapitres indépendants

Statistiques
Série, écart-type,
échantillonnage...

Géométrie
Droite, vecteur, plan...

Analyse
Fonction, variation, dérivée...



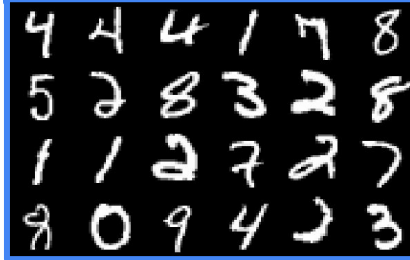
Probabilités
Probabilité conditionnelle, loi des
grands nombres...

Info et IA
Python, réseaux de neurones

Des challenges d'IA pour Lycéens

Estimer la réponse r à une question

Quel chiffre écrit dans
l'image ?



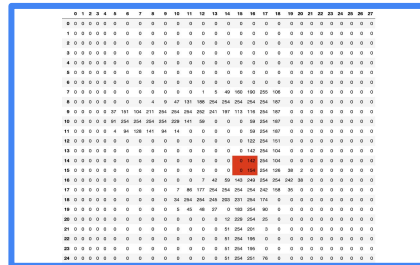
Le foetus est-il sain ou
en danger ?



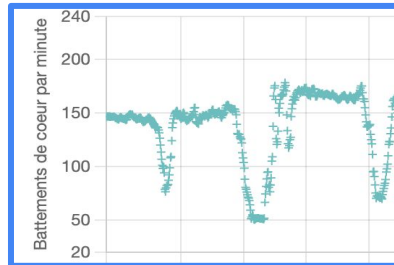
Un battement de coeur
est-il pathologique ?



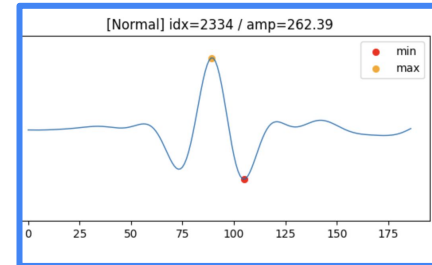
à partir d'une donnée d qui spécifie l'information disponible



Valeurs des pixels de
l'image



Rythme cardiaque



Électrocardiogramme