Introduction au produit scalaire en 1ère spé
Version 2 avec 36 élèves

Pré-requis :
notion de cosinus d'un angle obtus

Introduction aux définitions : worldcafé 40 minutes

On prévoit 3 fois 3 pôles. Les groupes seront constitués de 4 élèves. Les groupes sont formés au hasard.

Pôle 1	Pôle 2	Pôle 3
Pôle 1 bis	Pôle 2 bis	Pôle 3 bis
Pôle 1 ter	Pôle 2 ter	Pôle 3 ter

L'objectif est que les élèves (sauf les pivots) travaillent sur les trois définitions.
Le pivot ne reste que lors d'une rotation pour qu'il voit au moins deux définitions.

On fait des rotations de 10 minutes , il faut donc prévoir 35 à 40 minutes pour cette phase.

<u>Proposition</u>
Chaque groupe ne tourne que sur 3 pôles (les pôles 1bis, … 1 ter, … sont identiques aux pôles 1, …).
Il y 9 pôles dans la salle (îlots contre les tableaux aux murs).

Instructions collées sur chaque tableau : définition 1 + les 3 exercices + instructions.

Préparation de la salle :
Def 1, def 2, def 3 puis def 1, def 2, def 3 puis def 1, def 2, def 3.

Proposition alternative : les élèves tournent sur tous les tableaux et font les 3 exos de la fiche (sans faire d'exos supplémentaires sur le cahier mais on peut avoir des pbs de timing).

Chaque élève reçoit la feuille avec les 3 définitions + 3 énoncés n°4 page 226, n°1 (les 2 premiers) et 2 page 219 et n°21 page 227 Barbazo.

Définition 1
Phase 1 : le groupe découvre la définition + fait l'exercice 1 au tableau + se mettre d'accord sur le pivot et ce qu'il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°4 page 226 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s'agit ainsi d'équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Phase 2 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l'ex 1
Le groupe cherche l'ex 2 + se mettre d'accord sur le pivot et ce qu'il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°4 page 226 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s'agit ainsi d'équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Phase 3 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l'ex 2
Le groupe cherche l'ex 3 + se mettre d'accord sur le pivot et ce qu'il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°4 page 226 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s'agit ainsi d'équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Définition 2

Phase 1 : le groupe découvre la définition + fait l’exercice 1 au tableau + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°1 (en partie) et 2 page 219 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Phase 2 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l’ex 1
Le groupe cherche l’ex 2 + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°1 (en partie) et 2 page 219 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Phase 3 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l’ex 2
Le groupe cherche l’ex 3 + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°1 (en partie) et 2 page 219 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

Définition 3
Phase 1 : le groupe découvre la définition + fait l’exercice 1 au tableau + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : ex n°21 page 227 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

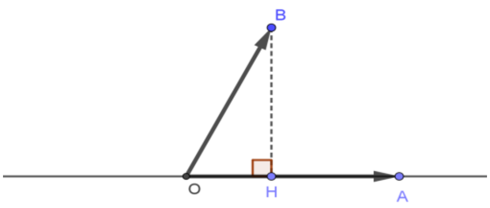
Phase 2 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l’ex 1
Le groupe cherche l’ex 2 + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : : ex n°21 page 227 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

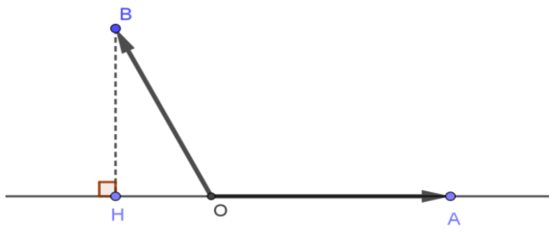
Phase 3 : le pivot explique la définition de son groupe + explique l’ex 2
Le groupe cherche l’ex 3 + se mettre d’accord sur le pivot et ce qu’il expliquera aux autres.
Sur le cahier : : ex n°21 page 227 (qui ne sera peut-être pas terminé, il s’agit ainsi d’équilibrer le temps mis par chaque groupe quel que soit son travail).

<u>Documents à afficher aux tableaux page suivante</u>

<u>Tableaux 1, 4, 7</u>

<u>Définition 1 :</u>
Soient O, A et B trois points distincts du plan.
Soit H, le point d’intersection de la droite (OA) et de la droite perpendiculaire à (OA) passant par B.
H s’appelle le **projeté orthogonal** de B sur la droite (OA).



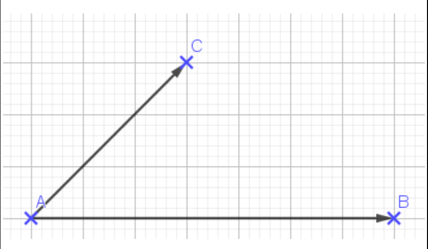
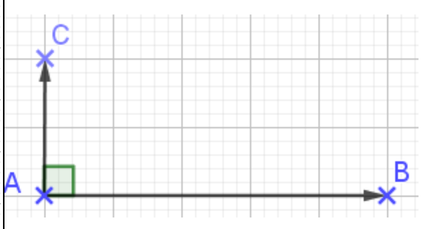
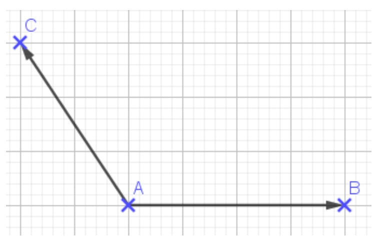


On appelle « **produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$** », noté $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, le nombre réel défini par :

- $OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens
- $-OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire.

<u>Consignes pour la phase 1:</u>
① lire et comprendre la définition proposée ci-dessus
② chercher ensemble sur le tableau l’exercice n°1 **en utilisant la définition 1.**
③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant
④ sur le cahier, chercher l’exercice n°4 page 226 du manuel.

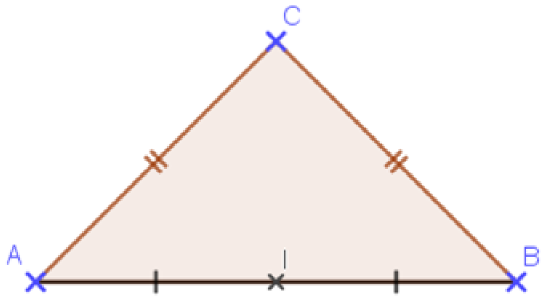
Exercice 1. Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Les carreaux du quadrillage ont des côtés de longueur 1.

Consignes pour la phase 2:
① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°1
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°2 **en utilisant la définition 1.**
③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant
④ sur le cahier, chercher l'exercice n°4 page 226 du manuel.

Exercice 2. ABC est un triangle isocèle en C tel que AB=6 ;
I est le milieu de [AB].

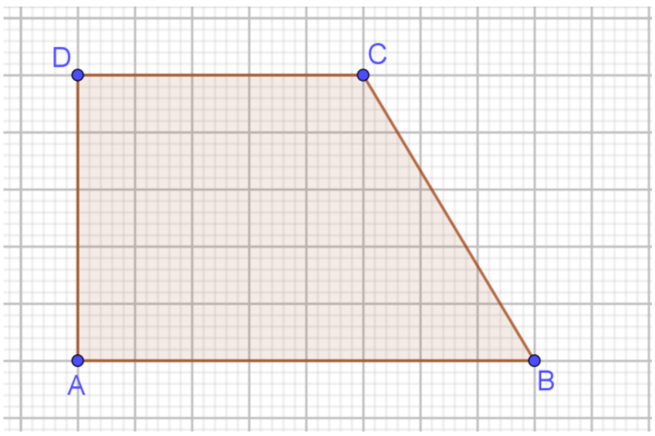
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Consignes pour la phase 3:
① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°2
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°3 **en utilisant la définition 1.**
③ sur le cahier, chercher l'exercice n°4 page 226 du manuel.

3. Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze rectangle.
Les carreaux du quadrillage ont des côtés de longueur 1.

Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$

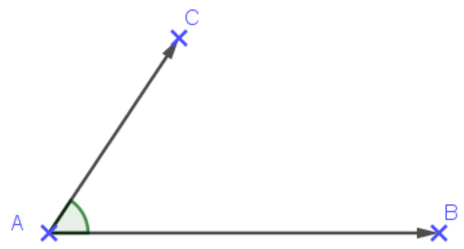


Tableaux 2, 5, 8

Définition 2 :
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls du plan.

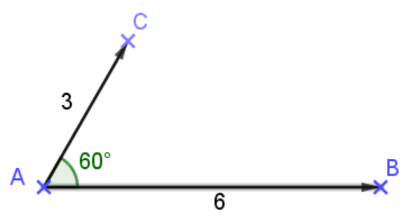
On appelle « **produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$** », noté $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, le nombre réel défini par :

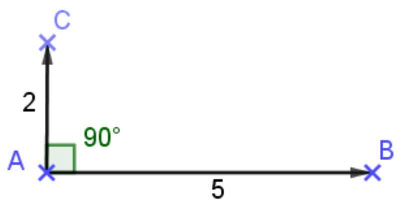
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

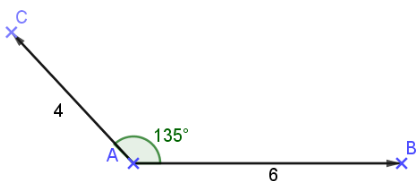


Consignes pour la phase 1:
① lire et comprendre la définition proposée ci-dessus
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°1 **en utilisant la définition 2.**
③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant
④ sur le cahier, chercher l'exercice n°1 (les 2 premiers) et n°2 page 219 du manuel.

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

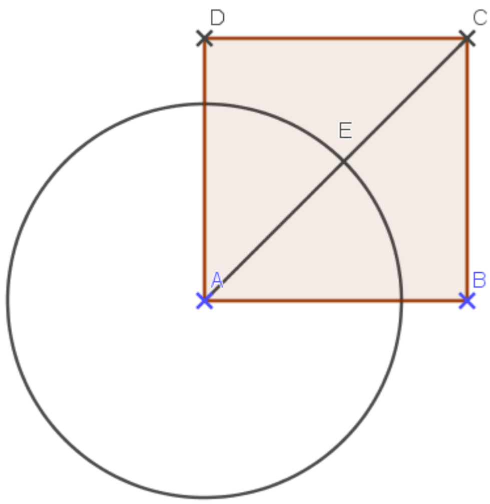






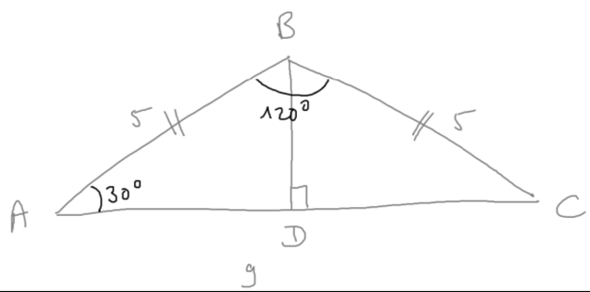
<u>Consignes pour la phase 2:</u>
① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°1
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°2 **en utilisant la définition 2.**
③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant
④ sur le cahier, chercher l'exercice n°1 (les 2 premiers) et n°2 page 219 du manuel.

Exercice 2.
Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 4.
E est un point du segment [AC] et situé sur le cercle de centre A et de rayon 3.
Déterminer les produit scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



<u>Consignes pour la phase 3:</u>
① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°2
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°3 **en utilisant la définition 2.**
③ sur le cahier, chercher l'exercice n°1 (les 2 premiers) et n°2 page 219 du manuel.

Exercice 3.

Dans la figure ci-contre faite à main levée, ABC est un triangle isocèle en B, tel que AB = 5 cm et AC = 9 cm. $\widehat{BAC} = 30°$ et $\widehat{ABC} = 120°$. De plus, [BD] est la hauteur issue de B.	

Appliquer la définition 2 pour calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$

Tableaux 3, 6, 9

Définition 3 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. On appelle « **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$**» , noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$, le nombre réel défini par : $\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y'$

Consignes pour la phase 1: ① lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°1 **en utilisant la définition 3.** ③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant ④ sur le cahier, chercher l'exercice n°21 page 227 du manuel.

Exercice 1. soit (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un repère orthonormé. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chaque cas :

$\vec{u}\binom{2}{5}$ et $\vec{v}\binom{3}{4}$	$\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{-5}{2}$

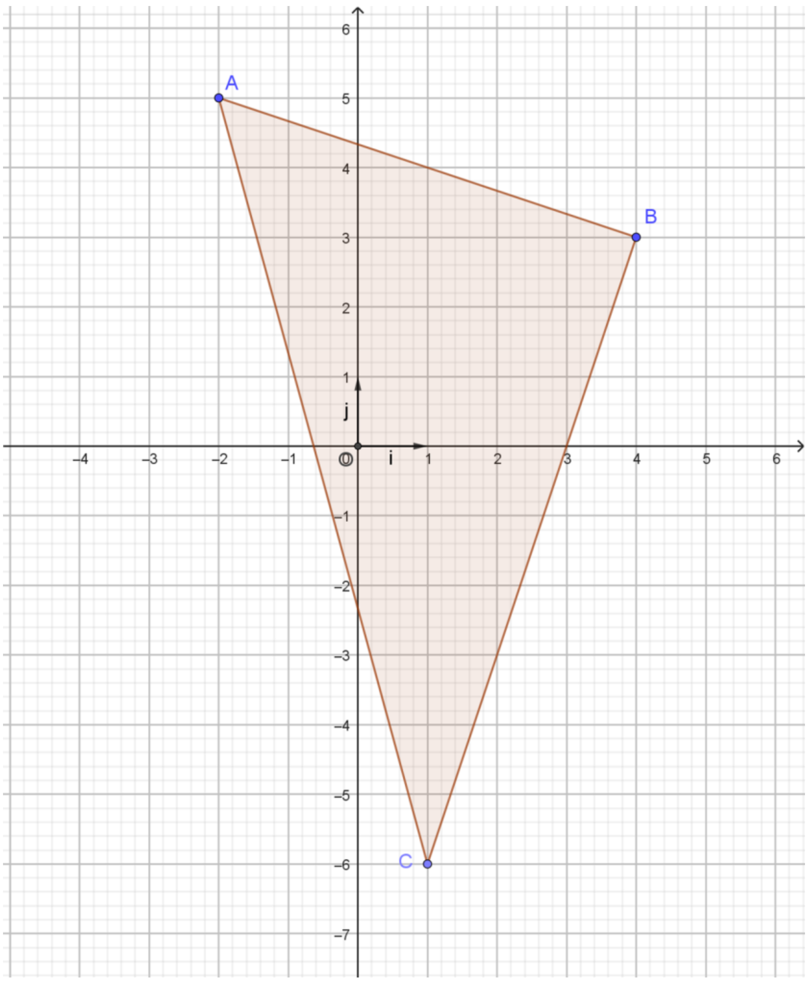
Consignes pour la phase 2: ① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°1 ② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°2 **en utilisant la définition 3.** ③ choisir un pivot et décider ce qui va être ensuite expliqué au groupe suivant ④ sur le cahier, chercher l'exercice n°21 page 227 du manuel.

Exercice 2.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points A(3;7) ; B(3;-1) et C(4;8).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

<u>Consignes pour la phase 3:</u>
① le pivot fait lire et comprendre la définition proposée ci-dessus ; il explique l'exercice n°2
② chercher ensemble sur le tableau l'exercice n°3 **en utilisant la définition 3.**
③ sur le cahier, chercher l'exercice n°21 page 227 du manuel.

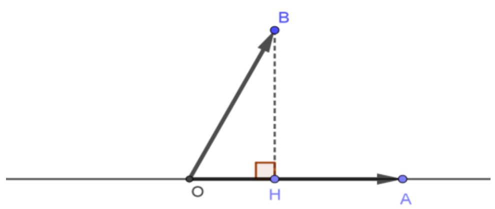
Exercice 3.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points A(-2;5) , B(4;3) et C(1 ;-6) .

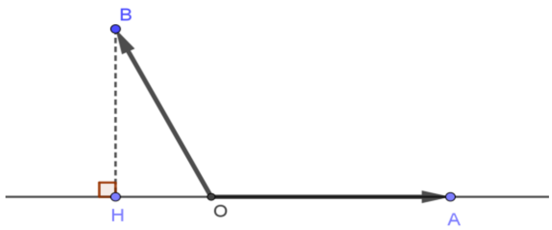
Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$



Documents élèves page suivante

Définition 1 :
Soient O, A et B trois points distincts du plan.
Soit H, le point d'intersection de la droite (OA) et de la droite perpendiculaire à (OA) passant par B.
H s'appelle le **projeté orthogonal** de B sur la droite (OA).





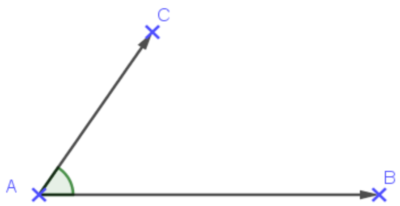
On appelle « **produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$** », noté $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, le nombre réel défini par :

- $OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens
- $-OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire.

Définition 2 :
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle « **produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$** », noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

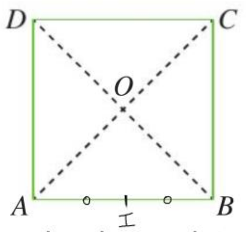


Définition 3 :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. On appelle « **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$**» , noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

Les énoncés des exercices à faire sur le cahier :
n°4 page 226

4 $ABCD$ est un carré de centre O et de côté a.



Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$ **b.** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$
d. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}$ **e.** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ **f.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}$

n°1 et 2 page 219

1 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5$, $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

2 Dans chacun des cas suivants, donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.
a. $AB = 3$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$.
b. $AB = 5$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$.

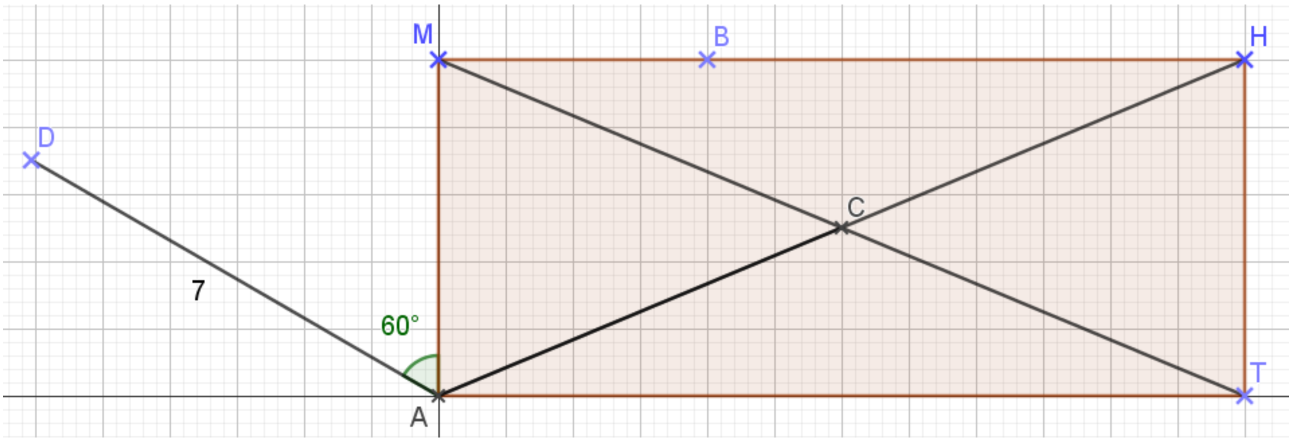
n°21 page 227

21 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A\,(-2\,;2)$, $B\,(1\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.
Calculer les produits scalaires suivants.
a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ **b.** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **c.** $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$

2ème partie en groupe : **30 minutes**
Chaque groupe doit rédiger sa solution.

Tâche commune :

Utiliser les définitions pour résoudre l'exercice suivant :



Les carreaux du quadrillage ont des côtés de longueur 1.

MATH est un rectangle de centre C tel que MA = 5 et AT = 12 . B est le point du segment [MH] tel que MB = 4 . D est le point du plan tel que AD = 7 et $\widehat{MAD}$= 60°.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AT}$ 2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$ 3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AT}$ 4. $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AT}$ 5. $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$

Commentaire :
Peu importe la définition choisie pour résoudre les questions 1.
Pour la question 2) , la définition 2 est la plus adaptée .
Pour la question 3) , la définition 1 est la plus adaptée mais on peut aussi utiliser la définition 3 en se plaçant dans un repère orthonormé comme (A, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
Pour la question 4) , en remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{CH}}$, la définition 1 est la plus rapide mais on peut aussi utiliser la définition 3 .
Pour la question 5), la définition 3 est la seule qui permet de répondre.

3ème phase : institutionnalisation :

- ➔ correction de l'exercice de la tâche commune
- ➔ le cours : on peut partir d'une des définitions et montrer les autres.

Par exemple :

<u>Définition:</u>
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. On appelle « produit scalaire » de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

On peut alors montrer que
- deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- La symétrie et la bilinéarité du produit scalaire
- $||\vec{u}||^2 = \vec{u}.\vec{u}$

et ensuite arriver aux autres « définitions » comme propriétés :

Avec la projection orthogonale :
A,B et C sont trois points du plan.

<table>
<tr><td colspan="2">Dans les figures 1 et 2 , A,B et C sont colinéaires donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot k\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\mathrm{AB}^2$</td></tr>
<tr><td>

Fig.1
Si k>0, AC=k AB donc $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = k\mathrm{AB}^2$
par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$</td>
<td>

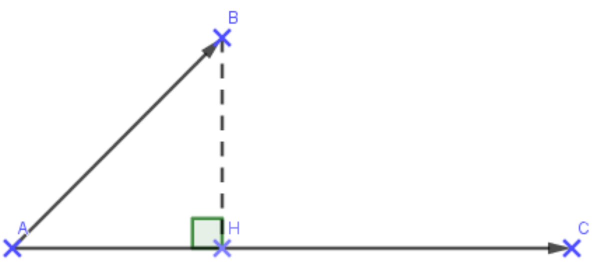
Fig.2
Si k<0, $\mathrm{AC} = -k\mathrm{AB}$ donc $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = -k\mathrm{AB}^2$
par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$</td></tr>
<tr><td>

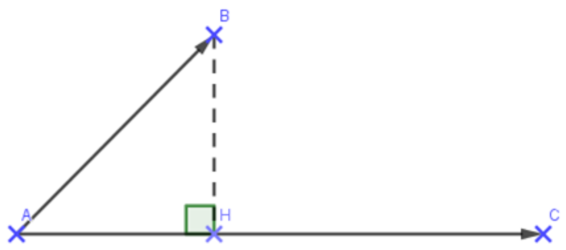
Fig.3</td>
<td>

Fig.4</td></tr>
</table>

H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot\overrightarrow{AC}$ $=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AC$	H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot\overrightarrow{AC}$ $=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=-AH\times AC$

Avec l'angle :

A,B et C sont trois points du plan.

 H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) Dans le triangle ABH rectangle en H . $AH=AB\times\cos(\widehat{BAC})$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AC$ $=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$	 H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) $AH=AB\times\cos(\widehat{BAH})$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AH\times AC=-AB\times\cos(\widehat{BAH})\times AC$ or $\widehat{BAH}=\pi-\widehat{BAC}$ donc$\cos(\widehat{BAH})=-\cos(\widehat{BAC})$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$