Les mathématiques babyloniennes

Journée de l'IREM 2025

Christelle Sjollema, Augustin Lefèvre

Groupe Histoire des Mathématiques, IREM de Bordeaux

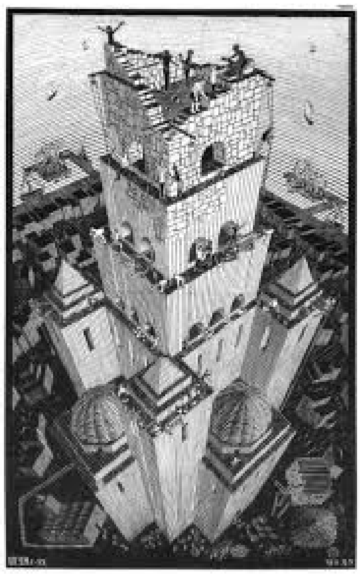
Il existe dans la communauté mathématique un attachement très fort aux mathématiques grecques, qui va jusqu'à associer la culture grecque à la naissance des mathématiques. C'est pourtant ignorer la richesse et l'antériorité des apports mathématiques dans d'autres civilisations, notamment la civilisation mésopotamienne, la civilisation indienne et la civilisation chinoise. En France, les travaux de Christine Proust pour la période babylonienne, de Karine Chemla pour la période chinoise, et Agathe Keller pour la période indienne, rendent justice à ces apports.

Dans cet atelier, nous présentons l'une des prouesses de la civilisation mésopotamienne : l'écriture sexagésimale positionnelle flottante.

Nous étudions la tablette YBC 7289, premier témoignage du nombre $\sqrt{2}$ *dans la civilisation mésopotamienne, aux alentours de 1700 avant notre ère.*

Enfin, nous présentons une activité autour du calcul des inverses en base 60, qui permet de mieux comprendre l'efficacité de la numération sexagésimale.

Pieter Brueghel l'ancien, ca. 1568, la petite tour de Babel



M.C. Escher, Tour de Babel, 1928

Images : Babylone, porte d'Ishtar : Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Porte_d%27Ishtar

Chronologie de la civilisation mésopotamienne

Années	Période	Civilisation	Documents
6000 - 3700	Obeid	Sédentarisation. Premiers villages (Jericho)	
3700 - 2900	Uruk	Naissance de l'écriture. Premières villes (Uruk, Suse). Invention du bronze et de la roue	Comptabilité, sceaux-cylindre, bulles d'argile, caractère cunéiformes ...
	...		
2100 - 1600	Paléo-babylonienne	Premier empire babylonien	Apparition de la notation sexagésimale Textes scolaires, tables métrologiques, textes mathématiques, ...
	...		
900 - 550	Néo-babylonienne ; néo-assyrienne	Bibliothèques (Ninive, Assur)	Traites d'observations astronomiques, interpolation des phases de la lune
	...		
300 - 100	Séleucide	Bibliothèques (Babylone)	Astronomie : éphémérides, apparition du zodiaque
			Source : Culture Math

Le nom « Mésopotamie » renvoie à une aire géographique, située entre les fleuves Tigre et Euphrate, à l'emplacement actuel de l'Irak. Par extension, elle désigne un lieu de transition entre le Néolithique et le début de l'histoire. Cette région voit en effet l'apparition des premiers villages, puis des premières villes, mais aussi l'apparition de l'écriture.

Nous nous intéressons ici particulièrement à l'époque dite « paléo-babylonienne », au cours de laquelle se sont développées les écoles de scribe, et d'où proviennent la majeure partie des tablettes cunéiformes recensées par les archéologues.

« Babylone » était au départ une cité État, et a connu deux périodes d'expansion : le premier empire Babylonien fondé par Hammourabi, puis le deuxième qui correspond plus aux éléments de l'imaginaire populaire, avec le mythe des jardins suspendus de Babylone et de la tour de Babel.

À la mort d'Alexandre le Grand, c'est le général Séleucos Ier qui hérite de la partie orientale de l'empire, dont la Mésopotamie et Babylone. Cette époque correspond au point culminant de l'astronomie babylonienne.

(Voir aussi la carte en annexe 1)

Activité 1 : l'écriture des nombres

En écriture cunéiforme, les nombres s'écrivent avec deux symboles, le clou  *et le chevron* 

Nombres entiers

La tablette HS0217 (voir annexe 2), datant de 1400 avant notre ère, représente la table de multiplication par 9.

Exercice 1 : en analysant cette tablette, retrouver la valeur d'un clou, deux clous, un chevron, deux chevrons …

Écriture fractionnaire

Pour représenter une fraction d'un entier, les mésopotamiens n'utilisaient pas de dénominateur et utilisaient la notation en base 60 de façon similaire à notre usage de la base 10

- en notation décimale, $123{,}5=1\times100+2\times10+3\times1+5\times\frac{1}{10}$
- en écriture cunéiforme, $123{,}5=2\times60+3+30\times\frac{1}{60}$ et on écrira donc 

De façon plus générale, une écriture cunéiforme pourra être associée à un nombre de la forme suivante :

$$a_n\times60^n+a_{n-1}\times60^{n-1}+\ldots+a_1\times60+a_0+b_1\times\frac{1}{60}+b_2\times\frac{1}{60^2}+\ldots+b_n\times\frac{1}{60^n}$$

(où n est un entier naturel, et a_i et b_i sont des entiers naturels)

Il y a en revanche une différence significative avec notre système de notation : l'absence de virgule. Cette absence fait que le nombre 60, le nombre 1, et le nombre $\frac{1}{60}$ sont représentés de la même façon, avec le chiffre 

C'est pourquoi on dit que la notation mésopotamienne est *sexagésimale positionnelle flottante*

Exercice 2 :

a)  représente un nombre. Si on suppose qu'il est compris entre 14 et 15, quelle peut être son écriture décimale ?

b) Le nombre   est une fraction comprise entre $\frac{1}{10}$ et 1. Combien vaut-il ?

Donner le résultat sous la forme d'une fraction.

Exercice 3 : écrire les nombres suivants en numération sexagésimale positionnelle flottante :

a) 1,2

b) 1,24

Activité 2 : la tablette YBC 7289

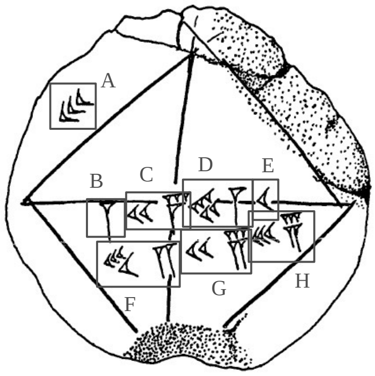
La tablette YBC7289 est datée entre 1800 et 1600 avant notre ère, environ mille ans après l'apparition de l'écriture dans la région. Il s'agit de l'époque paléo-babylonienne, pendant laquelle ont fleuri les écoles de scribes à travers la région.

Elle s'inscrit dans une riche collection d'écrits qui attestent de connaissances avancées sur les nombres, les opérations et la géométrie :

- la tablette Plimpton 322 s'apparente à une liste de triplets pythagoriciens (triangles rectangles dont les côtés sont de longueur entière)
- tablette de Tel Harmal : datée entre -2000 et -1900, elle contient des énoncés de problèmes concernant les triangles semblables
- tablette de Susa : valeur approchée de la circonférence d'un cercle

L'activité suivante a été proposée par Christelle Sjollema en classe de 2nde

Déchiffrer la tablette YBC 7289



1. On admet que :

a) le nombre A est l'écriture de 30,

b) l'ensemble des valeurs B, C, D et E est l'écriture B:C:D:E d'un nombre que nous noterons X,

c) l'ensemble des valeurs F,G et H est l'écriture F:G:H d'un deuxième nombre noté Y.

Que représente cette tablette ?

2. Déterminer la valeur des nombres B, C, D, E, F, G et H (entiers compris entre 1 et 59)

On pourra se servir des annexes 3 et 4 pour une lecture plus précise des caractères cunéiformes

3. Trouver les valeurs de X et Y sous forme fractionnaire, puis sous forme décimale.

4. Quelle est la relation entre X, Y et A ?

En conclusion

Les babyloniens classifiaient les nombres en deux catégories : les nombres pour quantifier et les nombres pour calculer. La classification des nombres par leur nature (entiers, décimaux, rationnels, réels..) sera étudiée des siècles plus tard par les mathématiciens grecs comme les Pythagoriciens. L'étude de cette tablette nous laisse à penser que les babyloniens connaissaient $\sqrt{2}$ et le considéraient comme coefficient, un nombre sans mesure à multiplier.

La tablette YBC 7289 est un exemple de calcul d'un produit. Les mathématiques enseignées dans les écoles de scribes de cette période paléo babylonienne sont strictement cantonnées à des multiplications et des divisions (étudiées comme des multiplications d'inverses, notion connue à cette époque).

Comment les babyloniens sont-ils arrivés à cette approximation de $\sqrt{2}$? On sait que la valeur approchée reproduite sur la tablette YBC 7289 existait déjà dans les fameuses tables qu'apprenaient par coeur les scribes dans leur 1ère période de formation.

On a retrouvé également des tablettes attestant de l'existence d'une méthode d'approximations successives de la racine carrée d'un nombre que nous qualifierions, dans un vocabulaire contemporain et donc anachronique, de méthode algorithmique.

Ces tablettes sont contemporaines de YBC 7289, mais d'autres hypothèses sont également possibles : tout simplement par essais successifs, en élevant au carré une série de nombres et en les comparant à 2.

Cette tablette, ainsi que la tablette Plimpton et celles de Tel Harmal, nous interpellent quant à l'avancement des connaissances en géométrie des Babyloniens, ainsi que du degré de sophistication de leurs techniques de calcul. Elles témoignent certainement d'un esprit d'abstraction qui préfigure les spéculation mathématiques des premières écoles philosophiques grecques : les milésiens, puis les pythagoriciens, et plus tard l'académie de platonicienne et aristotélicienne.

Activité 3 : la table des inverses

La formation mathématique des scribes à l’époque paléo-babylonienne se déroulait en trois étapes :

- *apprentissage de nombreuses tables (unités et mesure, diviseurs et multiples, inverses, etc.)*
- *les quatre opérations, le calcul des surfaces et des volumes, problèmes simples*
- *problèmes avancés*

Une fois la table des inverses apprise lors de la première phase, les scribes effectuaient leurs divisions de la façon suivante : diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse

Définition : on dit qu’un nombre est *régulier* si son inverse peut s’écrire en base 60 à l’aide d’un nombre fini de chiffres.

Par exemple,2 est régulier car il s’écrit $\frac{30}{60}$, et donc  en écriture cunéiforme.

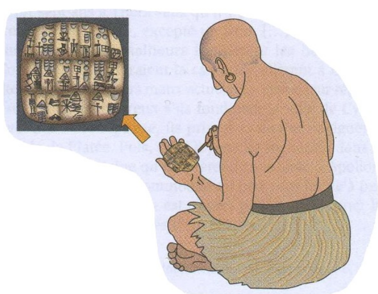
Exercice 4 : parmi les inverses des nombres 1 à 12, lesquels sont réguliers ? Lesquels sont irréguliers ? Pour les réguliers, on indiquera leur écriture sexagésimale positionnelle flottante.

Exercice 5 : énoncer un critère arithmétique pour déterminer si un nombre entier est régulier ou irrégulier.

Le fait que les inverses soient appris dans le cursus élémentaire des scribes renvoie à des pratiques concrètes dans notre enseignement : dès le cycle 3, les élèves apprennent que multiplier un nombre 0,5, cela revient à le diviser par 2, ainsi que l’écriture décimale des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{1}{5}$.

En revanche, ce n’est qu’à partir de la 4ème que l’on apprend que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Activité 4 : à vos tablettes !



Option 1 : sur une feuille, écrire en écriture cunéiforme la tablette des puissances de 2, de 2^1 à 2^{12}, puis la reproduire sur la tablette fournie à l’aide d’une baguette de bois.

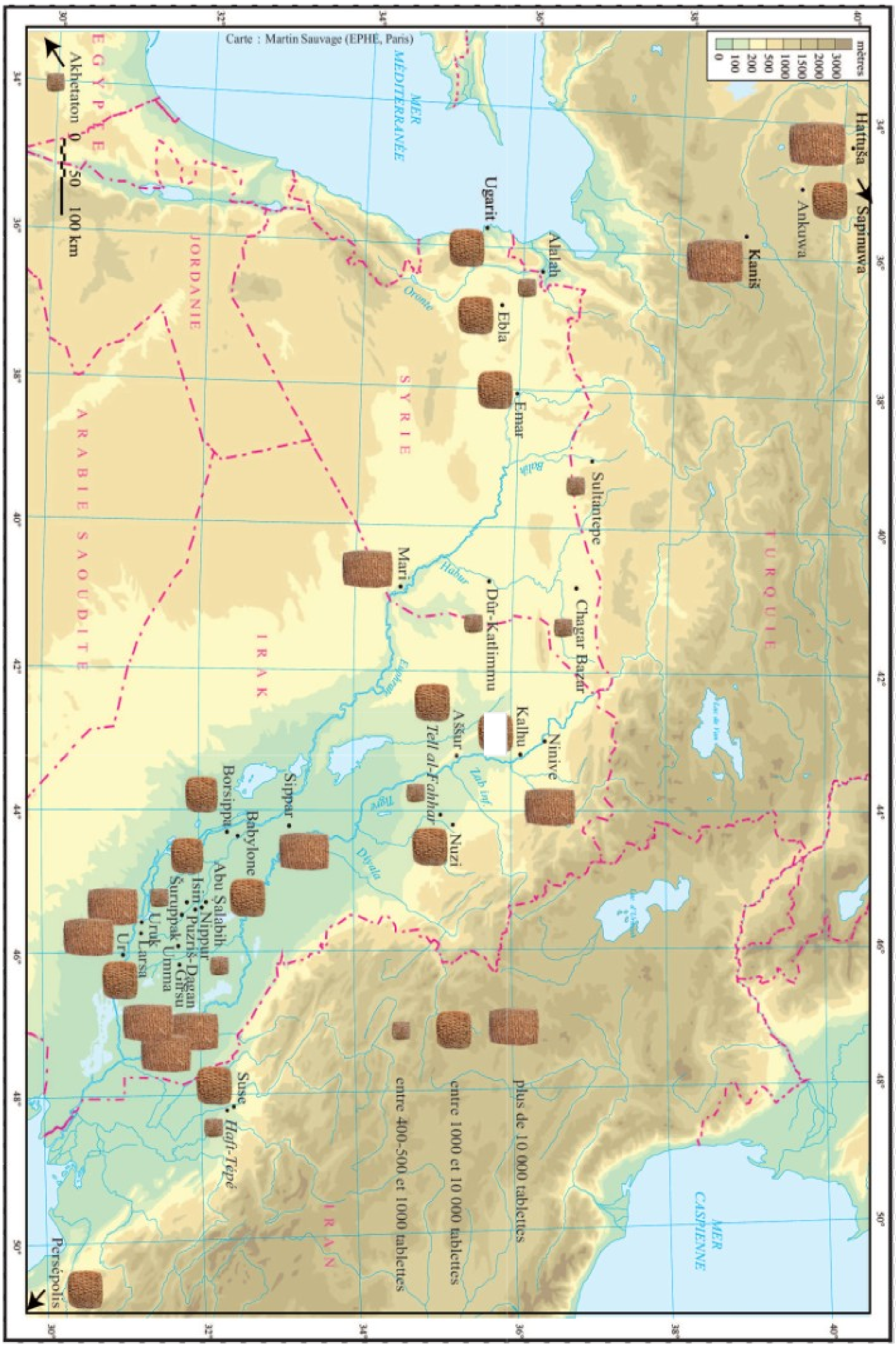
Option 2 : reproduire la tablette YBC7289 sur la tablette fournie à l’aide d’une baguette de bois

Pour aller plus loin … quelques références

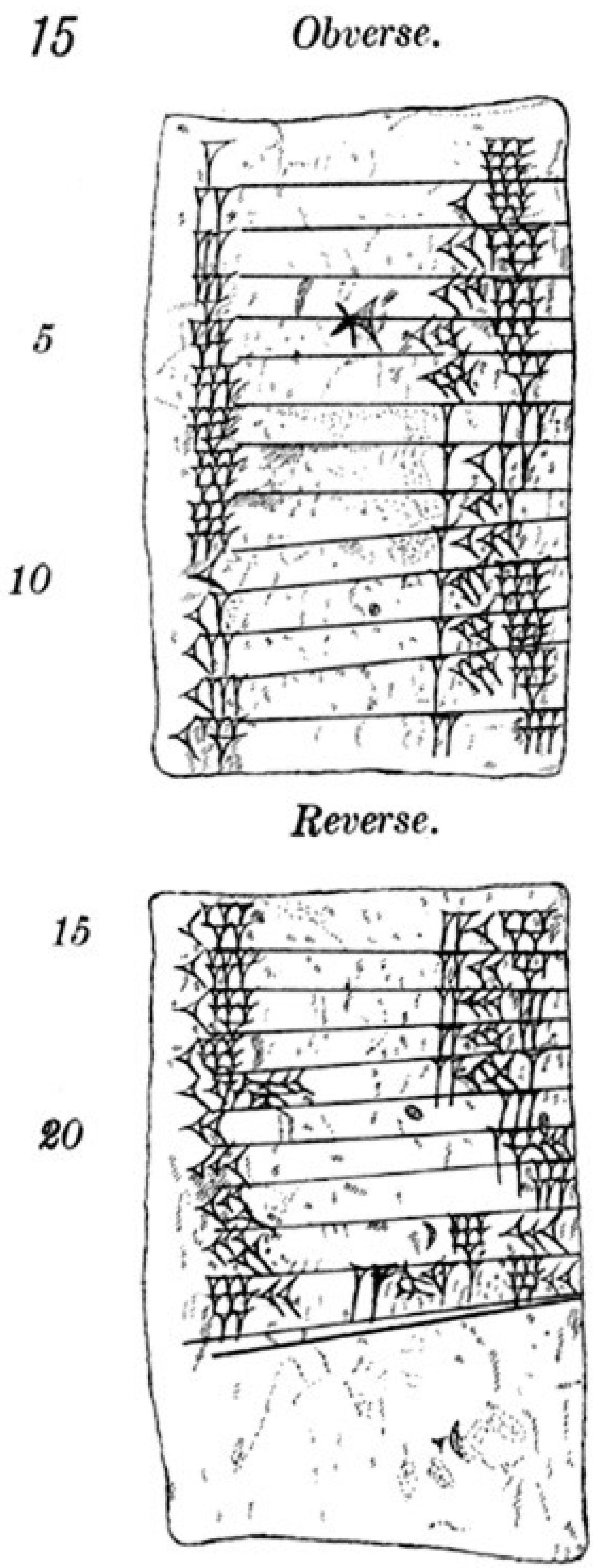
- Robson & David Fowler, « Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in context », *Historia Mathematica*, vol. 25, pp. 366-378, 1998.
- Buckle, David, 2023: "How the estimate of √2 on YBC 7289 may have been calculated." *Historia Mathematica* 62: 3-18.
- Benoît Rittaud, « À un mathématicien inconnu ! », *Bibnum* .
- Cécile Michel, « A l'école des scribes : écire et compter en cunéiforme », Journal du CNRS, 29/01/2017
- Christine Proust, « Le calcul sexagésimal en Mésopotamie » laboratoire Sphère de Paris Diderot
- Christine Proust, « Nombres et quantités dans les textes de Mésopotamie du Sud », Ecole du GDR d'Histoire des Mathématiques, 2013
- Christine Proust, « Tablettes mathématiques de Nippur ». Istanbul : Institut Français d'Études Anatoliennes-Georges Dumézil, 2007. 410 p.
- Georges G. Joseph, « The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics », *3ème édition*, *Princeton University Press*, 2011

Références des images utilisées :

- Scribe mésopotamien : cours d'histoire de 6ème, https://1492-1789.blogspot.com/2011/11/v-behaviorurldefaultvmlo.htm
- Carte des principaux sites de récolte de tablettes cunéiformes en mésopotamie, « Atlas historique du Proche-Orient ancien », dir. Martin Sauvage, Les Belles Lettres, 2020.
- Autres images : Cuneiform Data Library Initiative

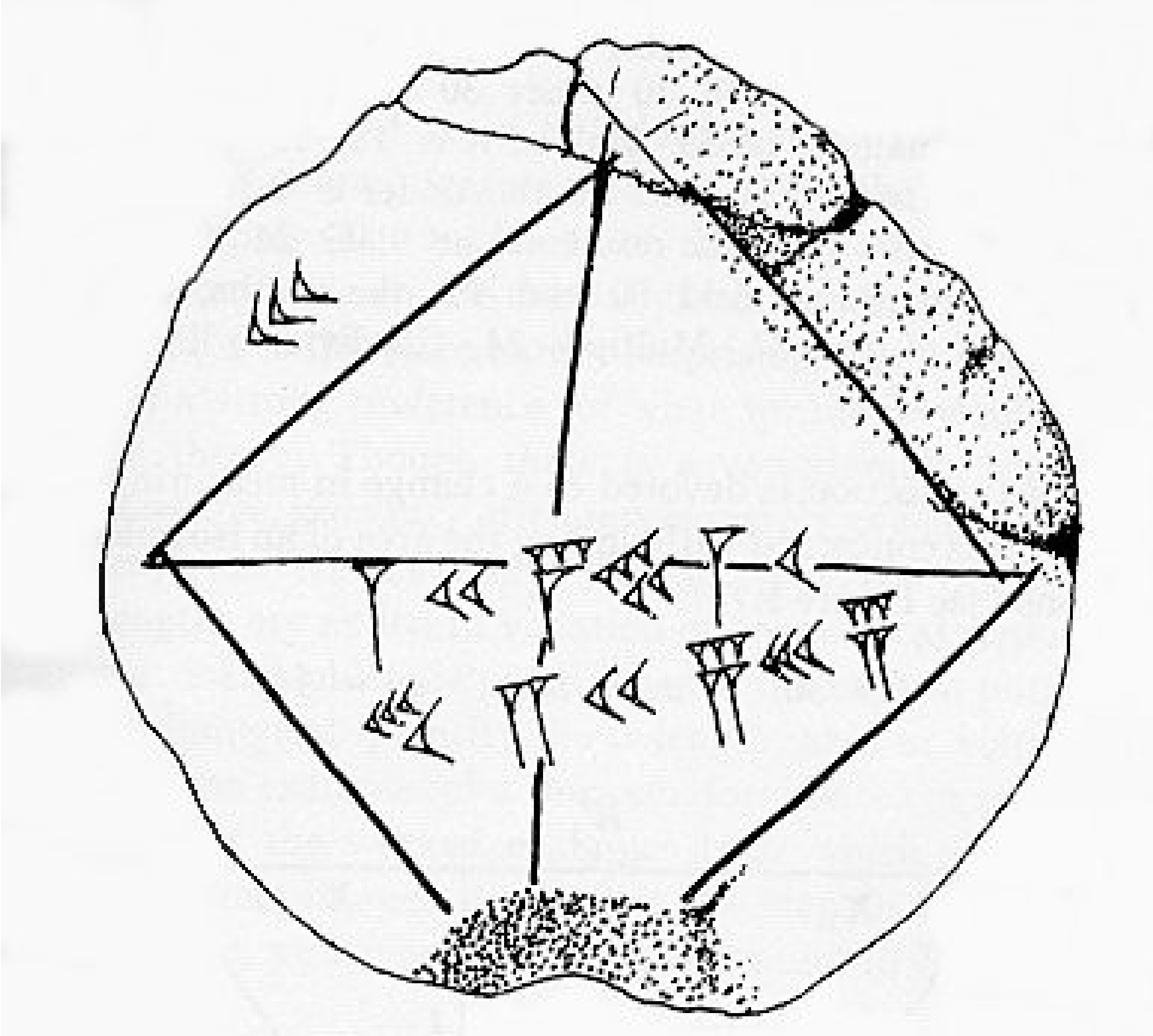


Annexe 1 : carte de Mésopotamie



Annexe 2 : tablette HS0217, faces avant et arrière. Source : CDLI

Annexe 3 : tablette YBC 7289, face avant. Source : CDLI



Annexe 4 : tablette YBC 7289, face avant, version stylisée. Source : CDLI