

Tâche n°1 : variations d'une fonction et équation f(x)=0

Phase 1 : individuelle (10 min)

f est la fonction définie sur [-2;3] par

$$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3.$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur [-2;3].

2. Justifier que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α sur [-2;3] puis donner une valeur approchée de α à 10⁻² près.

Phase 2 : entre spécialistes (10 min)

1. Corriger la phase 1.

2. On considère la fonction f définie sur [-1;2] par

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 1.$$

Justifier que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α sur ℝ puis donner une valeur approchée de α au millième près.

Tâche n°2 : signe d'une fonction

Phase 1 : individuelle (10 min)

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur [-2;3].

x	-2	3
Variations de f	5	-1

On sait, de plus, que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α sur [-2;3].

Après avoir placé α dans le tableau ci-dessus, dresser le tableau de signes de f(x).

2. Pour tout réel x>0, on pose $Q(x) = \frac{e^x(x-2)(x^2+1)}{x^3}$.

Justifier que, pour tout x>0, Q(x) est du signe de x-2.

Phase 2 : entre spécialistes (10 min)

1. Corriger la phase 1.

2. Pour tout réel x, on pose $Q(x) = \frac{(2x^2+5x-3)e^x}{x^2+2}$.

Étudier le signe de Q(x).

Tâche n°3 : dérivation et tangente horizontale

Phase 1 : individuelle (10 min)

f est la fonction définie sur]0;+∞[par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Déterminer f'(x) et le factoriser.

2. Calculer f'(1) et interpréter graphiquement le résultat.

Phase 2 : entre spécialistes (10 min)

1. Corriger la phase 1.

2. f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2-3x+3}$.

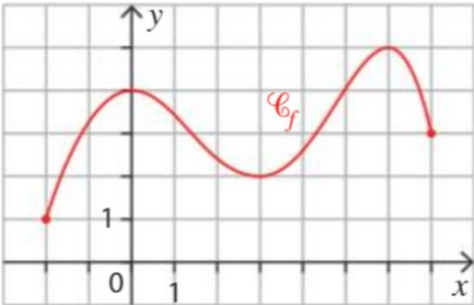
Déterminer les abscisses de tous les points de la courbe de f en lesquels la tangente est horizontale.

Tâche n°4 : convexité et points d'inflexion

Phase 1 : individuelle (10 min)

f est une fonction définie sur [-2;7].

1. On donne ci-dessous sa courbe représentative.



Déterminer graphiquement la convexité de f et préciser les abscisses des points d'inflexion de la courbe.

2. On donne ci-dessous le signe de f''(x).

x	-2	2	5	7	
Signe de f''(x)	-	0	+	0	-

Déterminer la convexité de f et préciser les points d'inflexion de sa courbe.

Phase 2 : entre spécialistes (10 min)

1. Corriger la phase 1.

Proposer un argument graphique pour justifier que f est convexe sur [2;5].

2. f est une fonction définie sur [-4;5].

On donne ci-dessous le signe de f''(x).

x	-4	-1	3	5	
Signe de f''(x)	+	0	+	0	-

Déterminer la convexité de f et préciser les points d'inflexion de sa courbe.

Tâche commune (40 min)**Partie A**

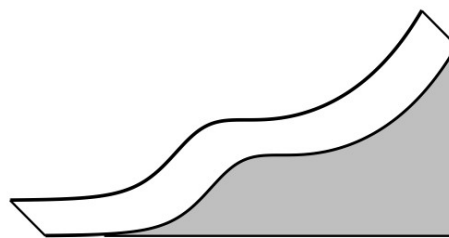
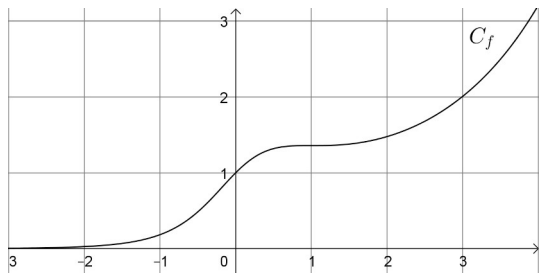
On considère la fonction p définie sur $[-3; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction p sur $[-3; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3; 4]$ puis donner une valeur approchée de α au dixième près.
3. Donner le tableau de signes de la fonction p sur $[-3; 4]$.

Partie B

f est la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $[-3; 4]$.
b. Justifier que la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Vue de profil du toboggan

- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
- b. On admet que pour tout réel x de $[-3; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction définie dans la partie A.

Déterminer si le toboggan assure de bonnes sensations. Justifier.

Tâche commune (40 min)**Partie A**

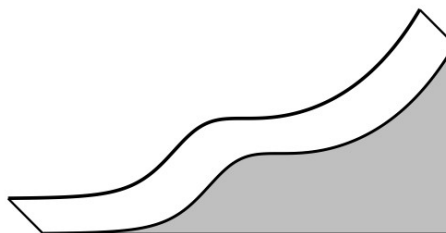
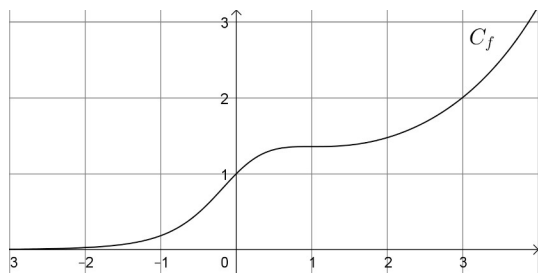
On considère la fonction p définie sur $[-3; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction p sur $[-3; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3; 4]$ puis donner une valeur approchée de α au dixième près.
3. Donner le tableau de signes de la fonction p sur $[-3; 4]$.

Partie B

f est la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $[-3; 4]$.
b. Justifier que la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Vue de profil du toboggan

- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
- b. On admet que pour tout réel x de $[-3; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction définie dans la partie A.

Déterminer si le toboggan assure de bonnes sensations. Justifier.