

Lois normales

Pourquoi centrer et réduire

- centrer et réduire une binomiale

Apparition de la loi normale centrée réduite

Le théorème de convergence de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée et réduite associée à X_n .

Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

[binomiale et normale.ggb](#)

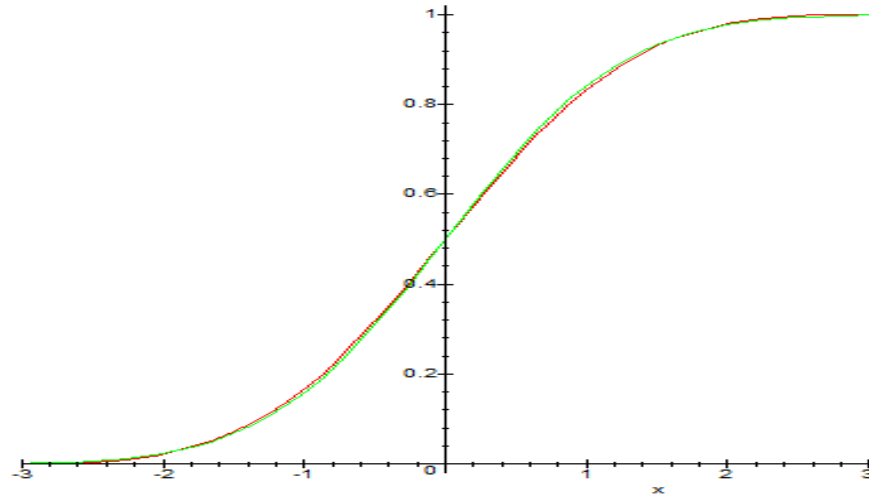
Généralisation

- Somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi
- La binomiale comme somme de Bernoulli

Convergence en loi

- Fonction de répartition : $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Convergence en loi
Une suite de variables X_n converge en loi vers une variable X si $F_{X_n}(x)$ converge vers $F_X(x)$ pour tout x .
- Théorème central limite
Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, où les X_k sont indépendantes, de même loi et ayant une variance. Alors la variable centrée et réduite associée à S_n converge en loi vers une variable de loi $N(0,1)$.

Exemple avec des lois uniformes



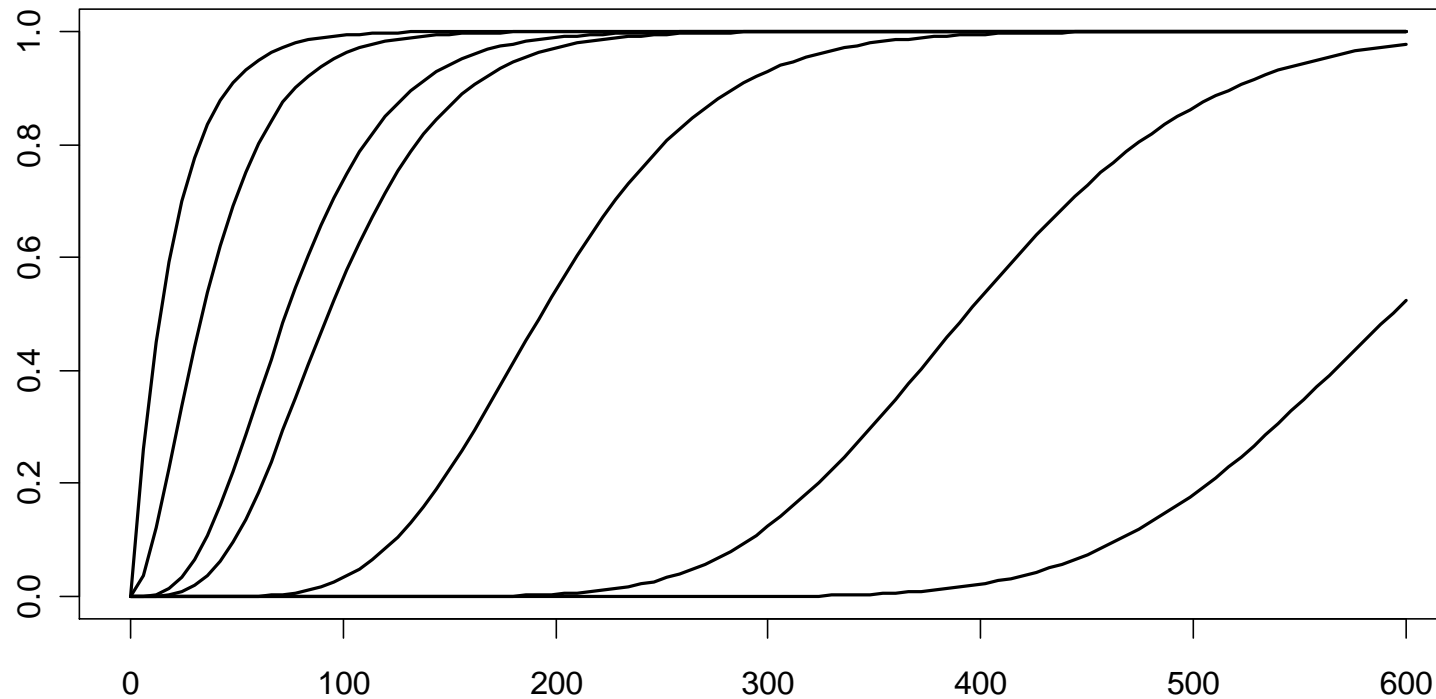
Le graphique ci-dessus donne les courbes des fonctions de répartition de la loi $N(0,1)$ et de la variable centrée et réduite associée à la somme de 5 lois uniformes sur $[0,1]$.

$P(X \leq 0,2) \approx 0,579$ pour la première et $0,577$ pour la deuxième.

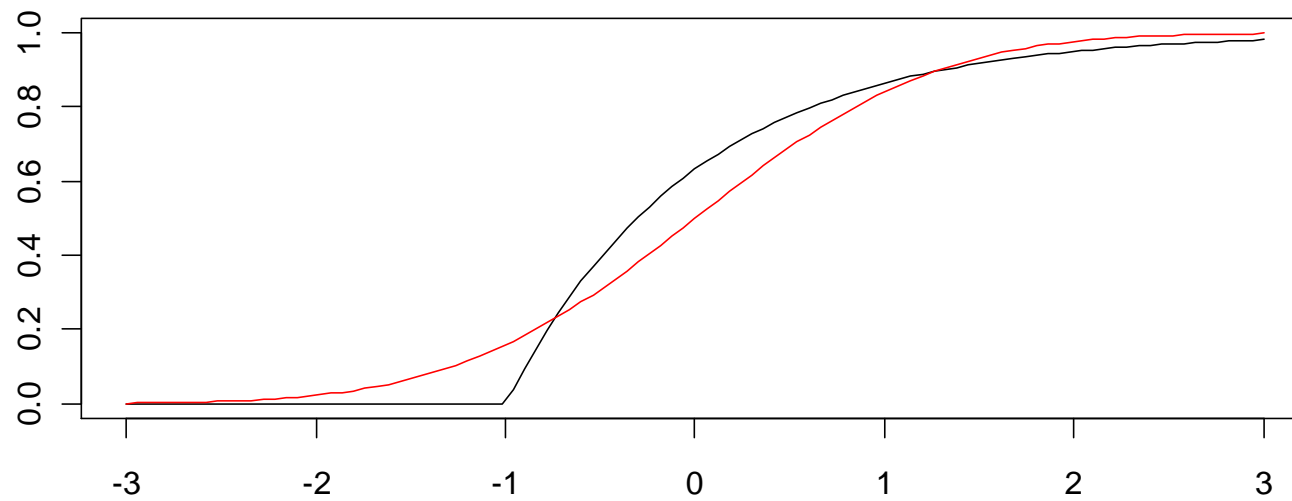
Exemple avec des lois exponentielles

- Fct de répartition de sommes de lois exponentielles de paramètre $1/20$

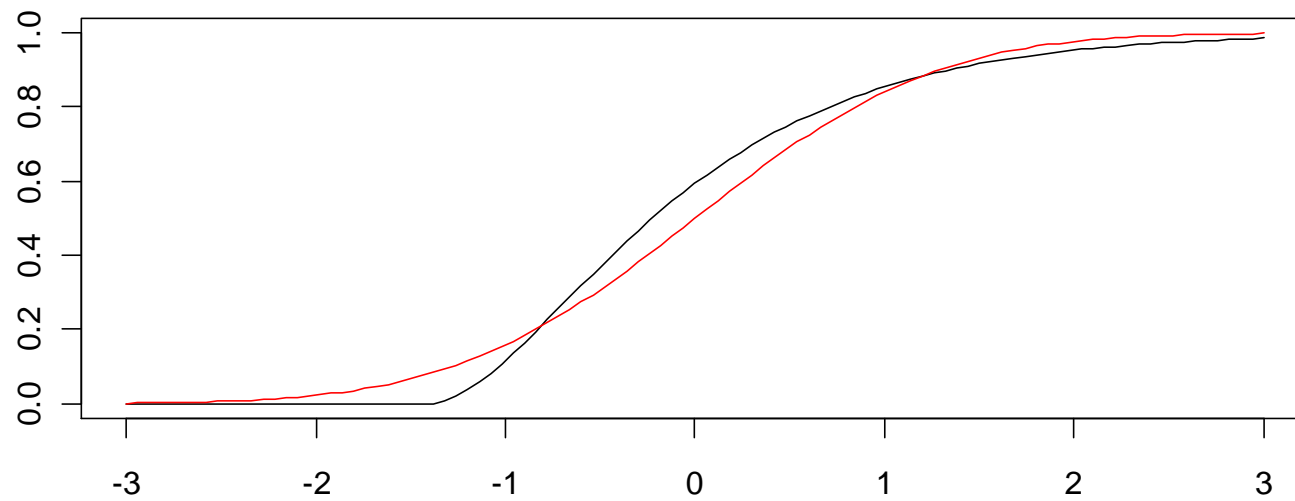
Fcts de répartition pour $n=1, 2, 4, 5, 10, 20, 30$



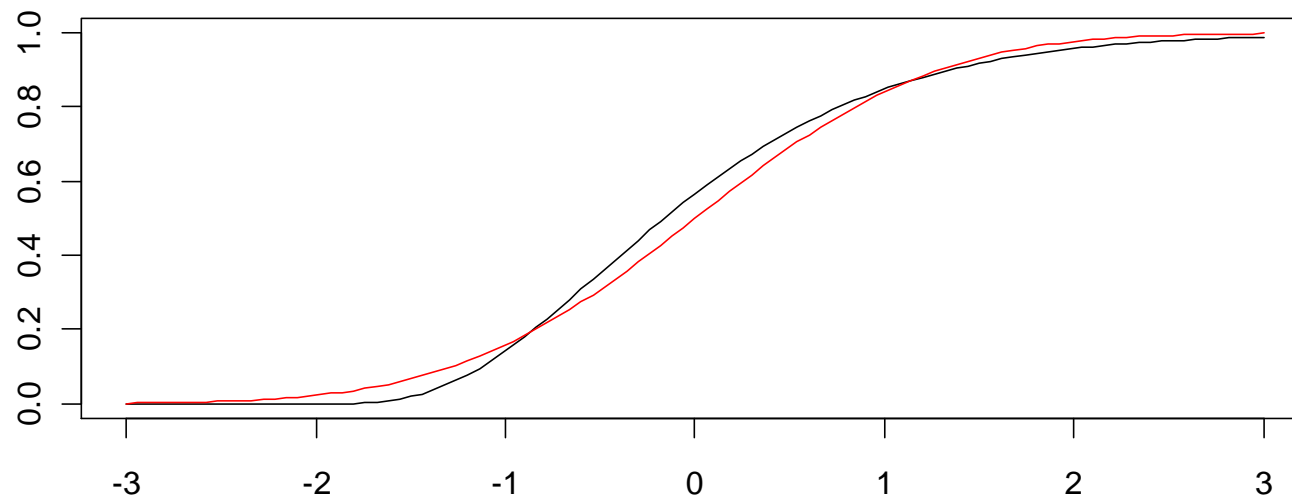
loi exponentielle centrée réduite



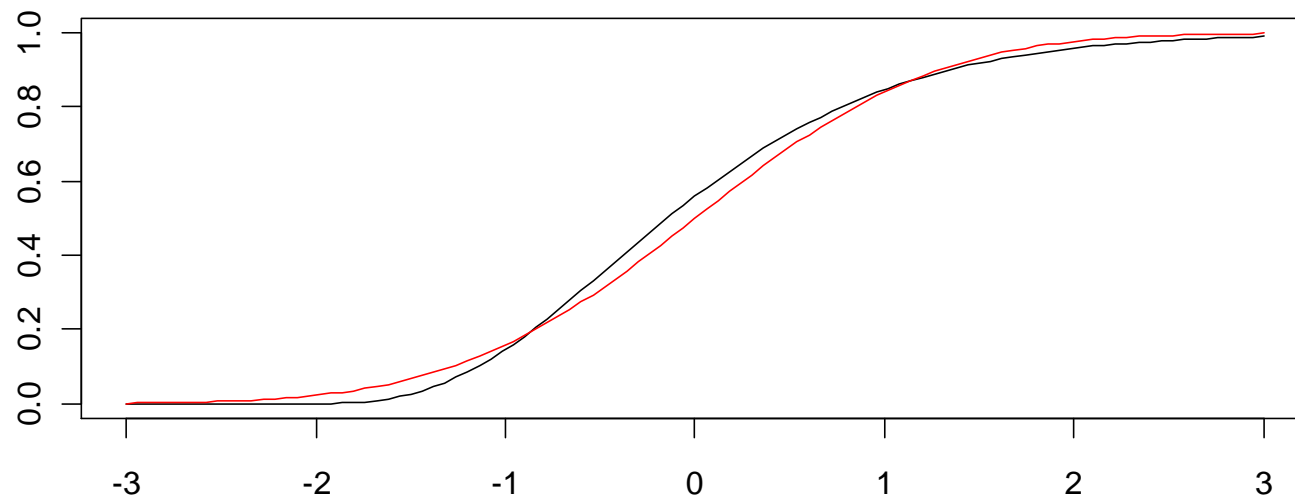
somme de 2 lois exponentielles, centrée réduite



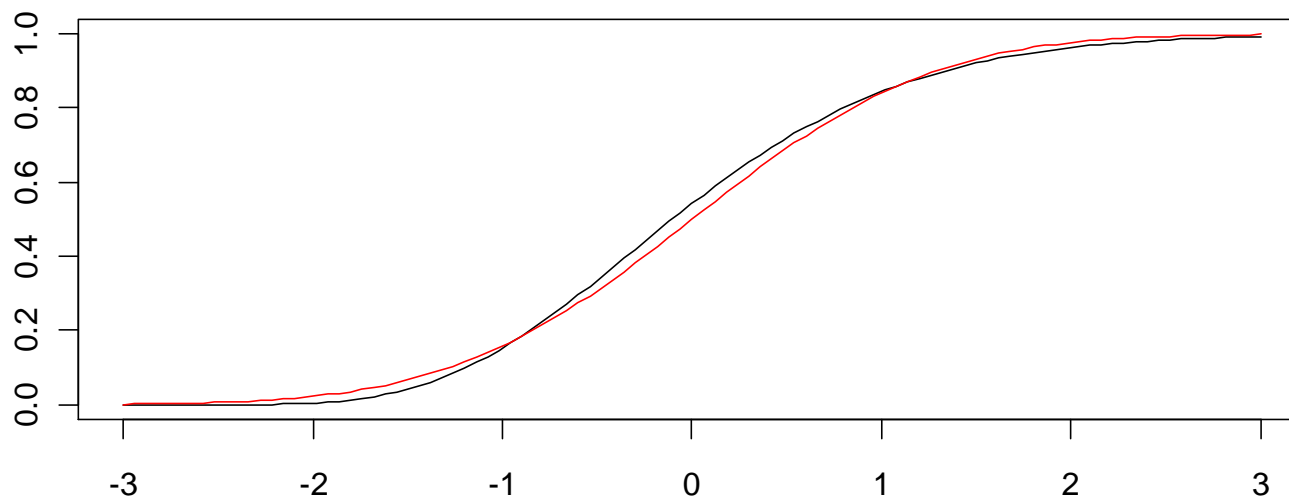
somme de 4 lois exponentielles, centrée réduite



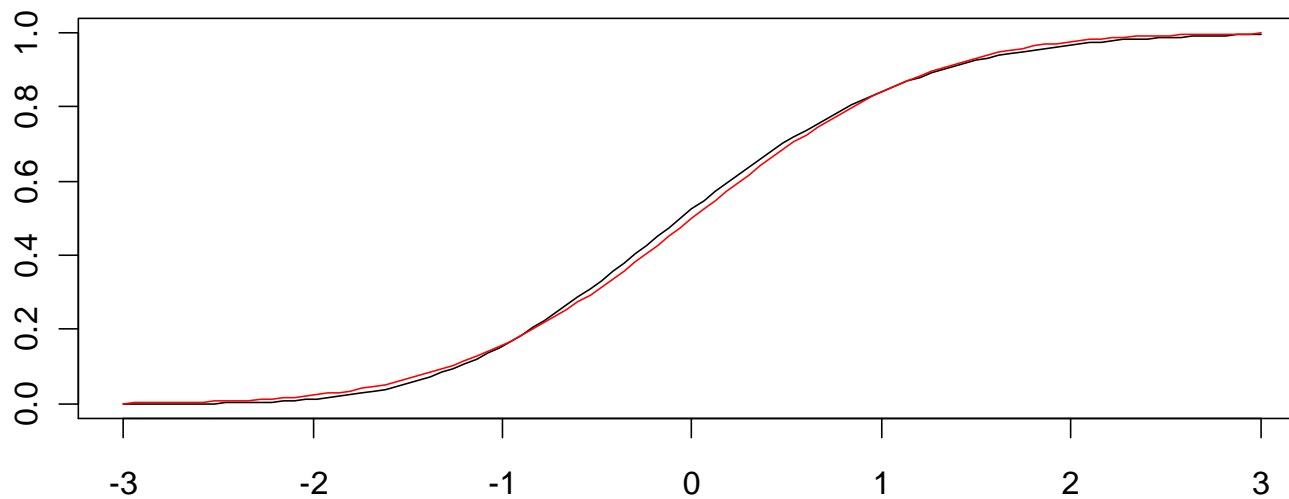
somme de 5 lois exponentielles, centrée réduite



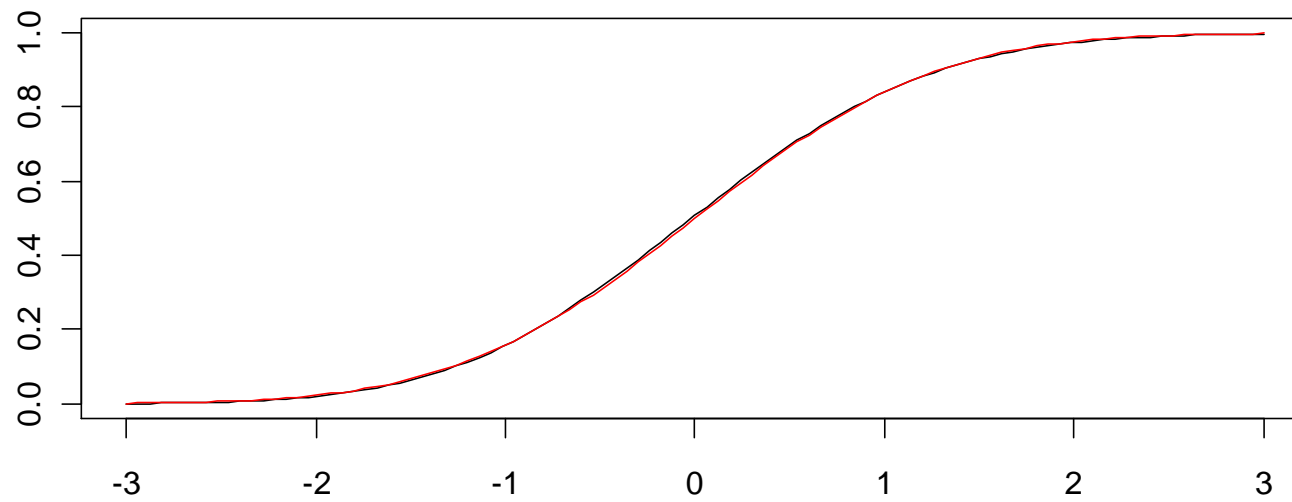
somme de 10 lois exponentielles, centrée réduite



somme de 30 lois exponentielles, centrée réduite



somme de 300 lois exponentielles, centrée réduite



Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si pour tous réels a et b avec $a < b$, on a :

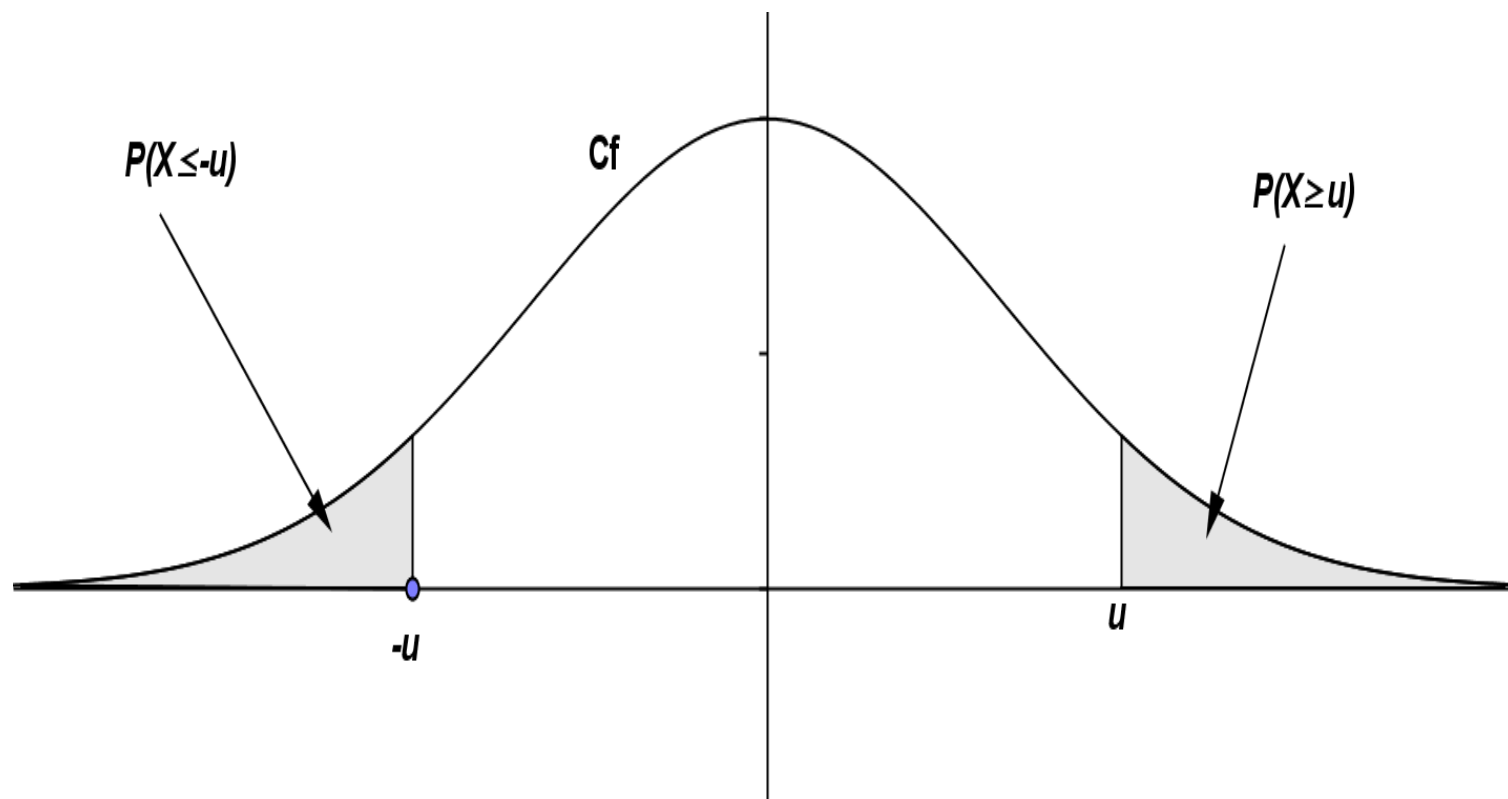
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est appelée la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

La fonction $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ est la fonction de répartition de X .

F est dérivable de dérivée f , strictement croissante sur \mathbb{R} donc bijective de \mathbb{R} sur $]0 ; 1[$.

Loi normale $N(0,1)$



Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Théorème :

Si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$

alors pour tout $\alpha \in]0 ; 1[$, il existe un unique réel positif tel que

$$P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Loi normale $N(0,1)$

- le $1-\alpha$ à partir de `ualpha.ggb`

Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Selon la définition donnée dans le programme :

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t f(t) dt .$$

Cette espérance est nulle et donc X est centrée.

Le fait que la densité est paire ne suffit pas à justifier ce résultat.

La variance est définie par analogie avec les variables discrètes par $E((X - E(X))^2)$.

Cela donne l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt$ laquelle vaut 1 et donc X est réduite.

Lois normales

1. Par définition, une variable suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$ si la variable $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $N(0,1)$.

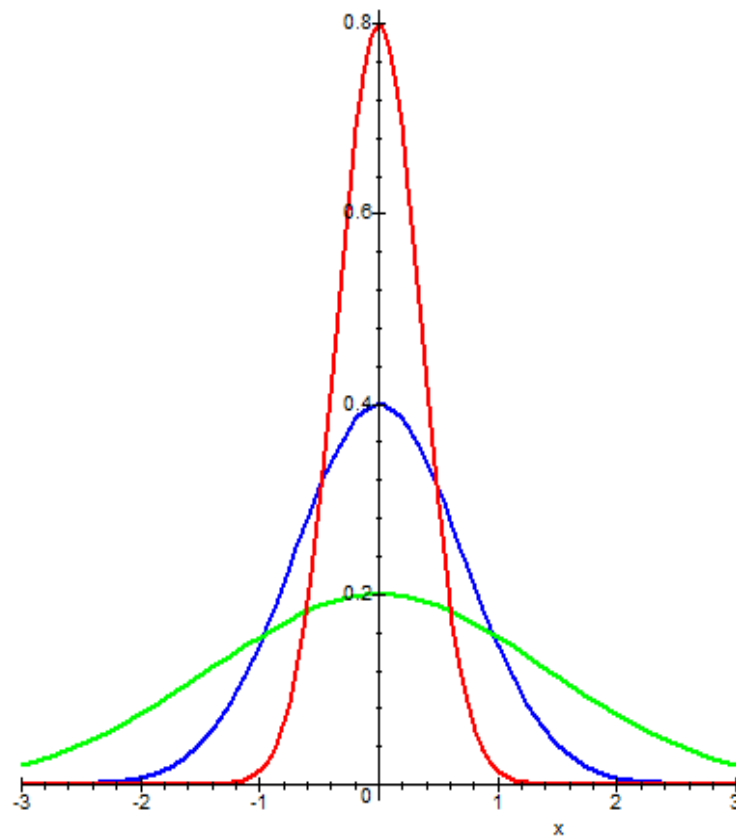
2. Si une variable Z suit une loi $N(0,1)$, alors la variable $aZ + b$ admet b pour espérance et $|a|$ pour écart type et sa densité est

$$x \mapsto \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

Les tableurs et les calculatrices permettent de faire tous les calculs concernant ces lois notées $N(b, a^2)$.

3. Si on cherche à déterminer les paramètres inconnus d'une loi normale, il faut se ramener à la loi $N(0,1)$.

Influence de l'écart type



Rouge: 0,25

Bleue: 1

Verte: 2