Bases d'exercices à destination des enseignants du secondaire

Exercices de calcul de probabilités - Lois Normales - Lois Binomiales

IREM Bordeaux - groupe Probabilités et Statistique - 2013

... ces exercices ne sont pas à destination des élèves

Calcul direct

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(8, 4^2)$. Calculer

$$P(6 < X < 10),\ P(X < 7,52),\ P(X > 8,48),\ P_{(X>5)}(X > 6).$$

Exercice 2. Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variabilité du diamètre réel de chaque bille et l'erreur produite est modélisée par une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0 mm et d'écart-type 0.015 mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7.98 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8.02 mm.

(1) Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée ?

(2) Lorsque la bille est trop petite elle est rejetée, lorsqu'elle est trop grande elle est retaillée convenablement (elle ne sera pas écartée après avoir été retaillée). Le coût de fabrication d'une bille est de 1 euro et le surcoût pour retailler une bille est de 30 centimes d'euros.
Soit C la variable aléatoire coût de fabrication d'une bille, déterminer la loi de C.

(3) Soit B la variable aléatoire bénéfice réalisé pour une bille prise au hasard (parmi toutes les billes produites). Déterminer la loi de B pour un prix de vente d'une bille de x euros (on remarquera que B ne peut prendre que les trois valeurs : -1 ; $x - 1.3$; $x - 1$).

(4) Déterminer x tel que $E(B) = 0$.

(5) Interpréter le résultat.

Exercice 3. Dans une population, la taille des hommes exprimée en centimètres, peut être représentée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 175 cm et d'écart-type $\sigma = 6$ cm.
1) Trouver la probabilité p que la taille d'un homme quelconque de cette population soit supérieure à 170 cm et inférieure à 180 cm.
2) Trouver la probabilité que la taille d'un homme quelconque de cette population soit inférieure à 170 cm ou supérieure à 180 cm.
3) On appelle N le nombre aléatoire d'hommes dont la taille est comprise entre 170cm et 180cm sur cinq hommes tirés au hasard dans la population.
3.a) Quelle est la loi de N (justifiez votre réponse) ?
3.b) Trouver la probabilité que N soit supérieur ou égal à 1.

Calcul direct et calcul avec quantiles

Exercice 4. L'âge d'obtention d'un diplôme est supposé être normalement distribué avec une moyenne de 23.1 ans et un écart-type de 1.1 an.
a) Déterminer la proportion de diplômés âgés de 22 à 23 ans.
b) Déterminer l'âge x tel que 90 % des diplômés soient âgés de moins de x.
c) Proposer une rédaction compatible avec les programmes de Terminale en termes de vocabulaire de probabilité-statistique (population, probabilité d'un évènement pour un individu tiré au hasard,....)

Exercice 5. On suppose que l'erreur E sur le poids mesuré par une balance est aléatoire, et suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type s.

(1) Déterminer une valeur approchée de s si on sait que l'erreur est en valeur absolue supérieure à 0.1 gramme dans 9% des cas.

(2) Quelle est alors la probabilité pour que l'erreur (en valeur absolue) soit supérieure à 0.2 gramme ?

(3) Déterminer le seuil E_0 tel que la probabilité pour que l'erreur soit en valeur absolue supérieure à E_0 soit de 5%.

Exercice 6. Un laboratoire fabrique des gélules dont la teneur en acide ascorbique est comprise entre 499 mg et 501 mg dans 98 % des cas. On suppose que cette teneur suit une loi normale d'espérance 500 mg.

(1) Déterminer l'écart-type de cette loi.

(2) Quel est le pourcentage de gélules contenant entre 499,5 et 500,5 mg d'acide ascorbique ?

(3) Entre quelles valeurs (centrées autour de la moyenne) va-t-on trouver 95 % des gélules ?

Exercice 7. Une machine fabrique des écrous dont le diamètre intérieur est compris entre 4.99 cm et 5.01 cm dans 98% des cas. On suppose que ce diamètre suit une loi normale de moyenne 5 cm. Quel est le pourcentage d'écrous dont le diamètre est compris entre 4.995 cm et 5.005 cm ?

Exercice 8. Un magasin de vêtements décide, au cours d'une campagne promotionnelle, d'accorder une remise aux clients dont le montant des achats est suffisamment élevé. On note Y la variable aléatoire correspondant au montant total des achats en euros d'un client choisi au hasard. On suppose que Y suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart-type 32.
Calculer la probabilité de l'événement : ≪ le montant des achats du client choisi est de 87 euros au plus ≫.
Calculer la probabilité de l'événement : ≪ le montant des achats du client choisi est compris entre 40 euros et 138 euros ≫. Le fabricant souhaite que 60% de ses clients profitent de la remise. A quel montant doit-il fixer le seuil d'achats pour avoir droit à la remise ?

Exercice 9. Lors d'un tir, on admet que les longueurs aléatoires de tir suivent une loi normale. On constate en ayant effectué un grand nombre de tirs que 10% des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km et 25% à une distance inférieure à 1,4 km. Calculer la moyenne et l'écart-type de la loi normale suivie par les longueurs de tir.

Exercice 10. Le pH de l'urine d'un adulte sain se modélise comme une variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(6.25, (0.36)^2)$. Déterminer un intervalle, centré autour de la moyenne, où se trouve la mesure du pH urinaire pour 75% des adultes sains.

Exercice 11. 1) Soit N une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite
a) Pour $r > 0$, exprimer $P(-r \leq N \leq r)$ en fonction de $P(N \leq r)$.
b) Déterminer x tel que $P(|N| \geq x) = 0.01$.

Une entreprise fabrique des rouleaux de papier peint, leur largeur est exprimée en centimètres. Un rouleau de papier peint est considéré comme "acceptable" pour la largeur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[52.95, 53.05]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée d'une machine, associe sa largeur.
2) Après un réglage de la machine, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 53 et de variance 0.0016. Donner les valeurs a et b telles que $\dfrac{X-a}{b}$ suive une loi normale centrée réduite.
3) Calculer la probabilité qu'un rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée de la machine soit acceptable pour la largeur.
4) Le résultat obtenu avec ce réglage est jugé insuffisant et on décide de modifier la variance avec un

nouveau réglage de la machine. X suit maintenant une loi normale de moyenne 53 et de variance inconnue σ^2.
Déterminer σ pour que $P(52.95 \leq X \leq 53.05) = 0.99$.

Exercice 12. On considère un lot de tubes à essais. A chaque tube, on associe 2 variables aléatoires notées D et H ; D représente son diamètre et H sa hauteur en mm. On suppose que :
- D suit la loi normale de moyenne $\mu_D = 19,7$ et d'écart-type $\sigma_D = 0,4$
- H suit la loi normale de moyenne $\mu_H = 200$ et d'écart-type $\sigma_H = 6$.

On suppose que les variables aléatoires D et H sont indépendantes. Ce qui signifie que pour tout intervalle I et J de $\mathbb{R}$

$$P((D \in I) \cap (H \in J)) = P(D \in I) \times P(H \in J).$$

1) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre d'au moins 20 mm.
2) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait une hauteur supérieure à 190 mm et inférieure à 210 mm.
3) En raison des contraintes d'expérience, un tube ne sera utilisable que si son diamètre est supérieur à 20 mm et sa hauteur appartient à l'intervalle $[190; 210]$.
On note p la probabilité que le tube soit utilisable, calculer p.
On considère maintenant un lot de 100 tubes à essais, on suppose que les tubes à essais du lot sont utilisables ou non indépendamment les uns des autres. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre de tubes utilisables parmi les 100 choisis.
4) Quelle est la loi de S ? Justifier votre réponse.

5) Donner l'espérance et la variance de S en fonction de p.
6) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 25 tubes utilisables parmi les 100 choisis.

Moivre-Laplace

Exercice 13. Un restaurateur peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.
1. Le restaurateur accepte 90 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 75 clients ?
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 14. Pour un certain type de graines, la probabilité de germination est $p = 0,8$. Une personne sème 400 graines. Donner une approximation de la probabilité que 300 au moins germent.

Exercice 15. Dans une population homogène de 20000 habitants, la probabilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée contre la grippe est de 0.4.
Donner une estimation du nombre de vaccins dont on doit disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieur à 0.05 ?

Exercice 16. Une partie de loterie consiste à lacher une bille dans un appareil qui comporte 6 sorties, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le numéro de la sortie franchie. Sa loi de probabilité est la suivante

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Le joueur gagne la partie si la bille emprunte les sorties 1, 2, 5 ou 6. Il perd la partie si la bille emprunte les sorties 3 ou 4.
1) Quelle est la probabilité p de gagner une partie ?

Le joueur fait 5 parties successives, elles sont supposées indépendantes. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées.
2) Quelle est la loi suivie par Y ?
3) Quelle est la probabilité que Y soit supérieur ou égal à 1 ?

Le joueur fait 100 parties successives, elles sont supposées indépendantes. On note Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées.
4) Quelle est la loi suivie par Z ? Donner son espérance et sa variance.
5) Par quelle loi à densité (ou loi continue) peut-on approcher la loi de Z ?
6) En utilisant cette approximation, donner une valeur approchée de $P(Z \geq 20)$.

Exercice 17. Le poids (exprimé en kg) de chaque fromage fabriqué dans une bergerie d'altitude est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 0.900 kg et de variance inconnue σ^2. On suppose que les poids de fromages différents sont des variables aléatoires indépendantes.
Une coopérative conditionne ces fromages pour expédition par lots de 10. On désigne par L la variable

aléatoire poids d'un lot ; ainsi si l'on désigne par X_i la variable aléatoire poids du fromage numéro i on a $L = \sum_{i=1}^{10} X_i$.
1) Quelle est l'espérance de L ?
2) Exprimer la variance de L en fonction de σ^2.
3) Quelle est la loi de L ?
4) Quelle variable aléatoire, fonction de L et σ, suit une loi normale centrée réduite ?
5) La coopérative a constaté que le poids d'un lot dépasse 10 kg avec la probabilité 0.15. Déterminer une valeur approchée de l'écart-type σ.
6) (**Indépendante des réponses aux questions précédentes**)
a) La variable aléatoire coût d'expédition C d'un lot est de $5\,Euros$ pour un lot ne dépassant pas 10 kg, et de 7 euros pour un lot dépassant 10 kg. Déterminer l'espérance et la variance de C.
b) La coopérative expédie 100 lots. On note T le coût total d'envoi de ces 100 lots. Utiliser le théorème central-limite pour calculer une valeur approchée de la probabilité pour que T dépasse 600 euros.