

Algorithme d'Euclide

Fiche élève

On souhaite produire un algorithme permettant de calculer le PGCD de deux nombres entiers positifs non nuls a et b , avec $a > b$, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Travail préparatoire

Prenons un exemple de calcul du PGCD utilisant l'algorithme d'Euclide, avec $a = 56$ et $b = 42$:

- Pour ne pas perdre les valeurs de a et b , on donne à aa la valeur de a , d'où $aa = 56$, et à bb la valeur de b , d'où $bb = 42$.
- On calcule le *reste* de la division entière de $aa = 56$ par $bb = 42$, ce qui donne *reste* = 14.
- On donne à aa la valeur de bb , d'où $aa = 42$, et à bb la valeur de *reste*, d'où $bb = 14$.
- On calcule le *reste* de la division entière de $aa = 42$ par $bb = 14$, ce qui donne *reste* = 0.
- Comme le *reste* est nul, l'algorithme s'arrête : le PGCD de $a = 56$ et $b = 42$ est $bb = 14$.

- Sur ce même modèle, calculer le PGCD de $a = 42$ et $b = 24$ en complétant le tableau suivant :

	a	b	aa	bb	reste
Valeurs de départ	42	24			
On donne à aa la valeur de a, et à bb la valeur de b			42	24	
On calcule le <i>reste</i> de la division entière de aa par bb					

Le PGCD de 42 et 24 vaut donc :

Conception de l'algorithme

Voici une « partie » de l'algorithme d'Euclide au format Algobox :

```

AlgorithmEuclide - 20.01.2015
*****
Cet algorithme calcule le PGCD deux nombres entiers positifs a et b à
l'aide de l'algorithme d'Euclide.
*****
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  ???
5  ???
6  ???
7  pgcd EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  AFFICHER "Valeur du premier nombre (entier positif non nul) ? "
10 LIRE a
11 AFFICHER "Valeur du deuxième nombre (entier positif non nul) ? "
12 ???
13 aa PREND_LA_VALEUR a
14 bb PREND_LA_VALEUR b
15 reste PREND_LA_VALEUR ??? % ???
16 TANT_QUE (??? != 0) FAIRE
17   DEBUT_TANT_QUE
18   aa PREND_LA_VALEUR ???
19   bb PREND_LA_VALEUR ???
20   ??? PREND_LA_VALEUR ???
21   FIN_TANT_QUE
22   ??? PREND_LA_VALEUR ???
23 AFFICHER "Le PGCD de "
24 AFFICHER a
25 AFFICHER " et "
26 AFFICHER b
27 AFFICHER " est "
28 AFFICHER pgcd
29 FIN_ALGORITHME
  
```

2. Créer cet algorithme sous Algobox, en complétant les parties indiquées par des « ??? ».
3. Tester cet algorithme, notamment sur les deux exemples précédents.
4. Quelle est la réponse de l'algorithme lorsque $a = 42$ et $b = 56$ (dans ce cas, nous avons $a < b$...) ? Voyez-vous pourquoi ?

Extension de l'algorithme

5. Proposer un algorithme, inspiré de l'algorithme précédent, permettant de déterminer si deux entiers positifs non nuls sont premiers entre eux. Si la réponse est négative, l'algorithme affichera le PGCD des deux nombres.

Algorithme d'Euclide

Fiche enseignant

Objectifs. Mise en œuvre d'un algorithme utilisant la structure de contrôle TANT QUE.

Prérequis. Notions de base d'algorithmique (notion de variable, entrées-sorties).

On souhaite produire un algorithme permettant de calculer le PGCD de deux nombres entiers positifs non nuls a et b , avec $a > b$, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Travail préparatoire

Prenons un exemple de calcul du PGCD utilisant l'algorithme d'Euclide, avec $a = 56$ et $b = 42$:

- Pour ne pas perdre les valeurs de a et b , on donne à aa la valeur de a , d'où $aa = 56$, et à bb la valeur de b , d'où $bb = 42$.
- On calcule le `reste` de la division entière de $aa = 56$ par $bb = 42$, ce qui donne `reste = 14`.
- On donne à aa la valeur de bb , d'où $aa = 42$, et à bb la valeur de `reste`, d'où $bb = 14$.
- On calcule le `reste` de la division entière de $aa = 42$ par $bb = 14$, ce qui donne `reste = 0`.
- Comme le `reste` est nul, l'algorithme s'arrête : le PGCD de $a = 56$ et $b = 42$ est $bb = 14$.

- Sur ce même modèle, calculer le PGCD de $a = 42$ et $b = 24$ en complétant le tableau suivant :

Il suffit de reprendre pas à pas la méthode illustrée dans l'exemple :

	a	b	aa	bb	reste
Valeurs de départ	42	24			
On donne à aa la valeur de a , et à bb la valeur de b			42	24	
On calcule le <code>reste</code> de la division entière de aa par bb					18
On donne à aa la valeur de bb , et à bb la valeur de <code>reste</code>			24	18	
On calcule le <code>reste</code> de la division entière de aa par bb					6
On donne à aa la valeur de bb , et à bb la valeur de <code>reste</code>			18	6	
On calcule le <code>reste</code> de la division entière de aa par bb					0
Le <code>reste</code> est nul, le PGCD est donc bb				6	

Le PGCD de 42 et 24 vaut donc : 6

Conception de l'algorithme

Voici une « partie » de l'algorithme d'Euclide au format Algobox.

2. Créer cet algorithme sous Algobox, en complétant les parties indiquées par des « ???? ».

Les ajouts son signalés *en rouge* :

```

AlgorithmeEuclide - 20.01.2015
*****
Cet algorithme calcule le PGCD deux nombres entiers positifs a et b à
l'aide de l'algorithme d'Euclide.
*****
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  aa EST_DU_TYPE NOMBRE
5  bb EST_DU_TYPE NOMBRE
6  reste EST_DU_TYPE NOMBRE
7  pgcd EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  AFFICHER "Valeur du premier nombre (entier positif non nul) ? "
10 LIRE a
11 AFFICHER "Valeur du deuxième nombre (entier positif non nul) ? "
12 LIRE b
13 aa PREND_LA_VALEUR a
14 bb PREND_LA_VALEUR b
15 reste PREND_LA_VALEUR aa % bb
16 TANT_QUE (reste != 0) FAIRE
17   DEBUT_TANT_QUE
18     aa PREND_LA_VALEUR bb
19     bb PREND_LA_VALEUR reste
20     reste PREND_LA_VALEUR aa % bb
21   FIN_TANT_QUE
22   pgcd PREND_LA_VALEUR bb
23 AFFICHER "Le PGCD de "
24 AFFICHER a
25 AFFICHER " et "
26 AFFICHER b
27 AFFICHER " est "
28 AFFICHER pgcd
29 FIN_ALGORITHME
  
```

3. Tester cet algorithme, notamment sur les deux exemples précédents.

Normalement, ça fonctionne ;-)...

4. Quelle est la réponse de l'algorithme lorsque $a = 42$ et $b = 56$ (dans ce cas, nous avons $a < b...$) ?
Voyez-vous pourquoi ?

La réponse est correcte : 14... Lorsque $aa < bb$, la première exécution du corps de la boucle tant-que va échanger les valeurs de aa et bb . En effet, $reste$ prend la valeur 42 (ligne 15), puis aa prend la valeur de bb , c'est-à-dire 56 (ligne 18) et bb la valeur de aa , c'est-à-dire 42 (ligne 19).

Extension de l'algorithme

5. Proposer un algorithme, inspiré de l'algorithme précédent, permettant de déterminer si deux entiers positifs non nuls sont premiers entre eux. Si la réponse est négative, l'algorithme affichera le PGCD des deux nombres.

Deux nombres étant premiers entre eux si et seulement si leur PGCD vaut 1, il suffit de modifier uniquement la partie « affichage des résultat » de l'algorithme :

```
23  AFFICHER "Les nombres "  
24  AFFICHER a  
25  AFFICHER " et "  
26  AFFICHER b  
27  SI (pgcd == 1) ALORS  
28    DEBUT_SI  
29    AFFICHER " sont premiers entre eux."  
30    FIN_SI  
31  SINON  
32    DEBUT_SINON  
33    AFFICHER " ne sont pas premiers entre eux (leur PGCD vaut "  
34    AFFICHER pgcd  
35    AFFICHER ")."  
36    FIN_SINON
```