Les aiguilles de Buffon – Test en Réel –

IREM d'Aquitaine Groupe *Probabilités et statistique*

Semaine des Maths du 14 au 20 mars 2016

Lundi 14 mars : le π Day

Objectifs pédagogiques :

- proposer une activité à réaliser pendant la semaine des mathématiques ;
- proposer une activité qui a une trame historique (elle a été imaginée par le naturaliste, membre de l'Académie Française, philosophe et mathématicien Georges Louis Buffon (1707-1788), connu pour « L'Histoire Naturelle » qui a influencé notamment Charles Darwin) ;
- exploiter la force de la mise en commun de données afin d'affiner l'estimation du nombre π ;
- faire travailler les notions de fréquence et de simulation au programme de troisième ;
- faire travailler l'estimation d'une proportion inconnue au programme des classes de lycée ;
- obtenir un intervalle de confiance d'une proportion inconnue (au programme du lycée), et en déduire un intervalle de confiance pour l'estimation de π par un travail sur les inégalités.

Le principe de l'activité :

Le but est d'utiliser l'expérience des aiguilles de Buffon pour obtenir une estimation de π de façon statistique. On utilise un outil collaboratif pour obtenir une estimation plus précise à l'aide de toutes les classes qui participent. C'est l'occasion de faire des statistiques concrètement, et peut être l'occasion de parler par exemple de fluctuation d'échantillonnage, d'intervalle de confiance, et de manier des inégalités.

C'est un travail collaboratif : on a besoin du maximum d'expérimentations pour que les résultats obtenus, une fois agrégés, soient concluants (pour l'estimation statistique de π), à la manière des calculs scientifiques partagés et distribués sur des millions d'ordinateurs personnels.

Chaque classe inscrira ses résultats sur le site internet (utilisant Shiny et R) **https://shiny.math.cnrs.fr/semaine_des_mathematiques/** pour alimenter la banque de données des résultats et comparer ses résultats aux autres.

Chaque enseignant propose à sa classe (ou 1/2 classe) le travail expérimental suivant : lancer des aiguilles (ou cure-dents, baguettes...) sur un plancher (ou carrelage ou parquet) et compter combien de fois les aiguilles intersectent les lignes parallèles du plancher, dans le but d'analyser la fluctuation d'échantillonnage et d'estimer la probabilité d'intersection (par la fréquence du nombre d'aiguilles ayant chevauché une ligne du plancher). L'objectif, si le travail est fait sérieusement, est d'estimer statistiquement le nombre π avec un intervalle de confiance.

Descriptif de l'activité :

Matériel :

- des cure-dents de longueur identique (mais pas imposée) ou tout objet qu'on peut lancer par terre, « aiguilles », baguettes, ...
- un plancher, ou un carrelage, avec des lignes régulièrement espacées, pouvant être considéré infini au regard de la longueur des aiguilles, dont l'espacement entre lames est supérieur à la longueur de l'aiguille. Si on travaille avec un carrelage, seules les lignes selon une direction (que l'on appellera verticale ici) seront prises en compte.
- feuilles pour noter les résultats

Mesure des longueurs, seul le rapport a/b joue un rôle.

On note *b* la largeur des lames de parquet, et *a* la longueur d'un cure-dent, sur l'exemple : *b*=9,8 cm et *a*=6,4 cm. La précision des mesures est assez importante, sans être cruciale.

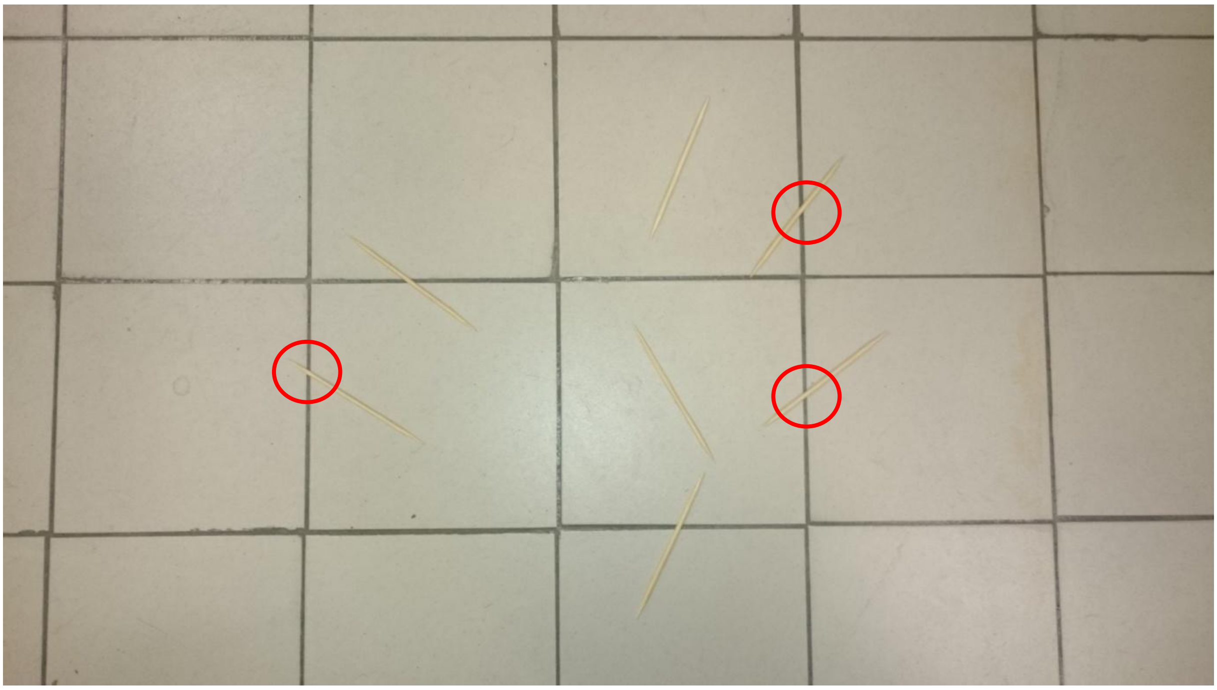
L'expérimentation :

- Par groupe de 3 élèves, par exemple (2 lanceurs, 1 noteur, rotation possible) : chaque lanceur dispose de 10 cure-dents.

- Chaque groupe s'isole un peu des autres (pour ne pas se mélanger les aiguilles).

- Dans chaque groupe : les lanceurs jettent par terre leurs cure-dents (sans mélange possible) et annoncent au noteur le nombre de leurs cure-dents ayant une intersection avec les lignes verticales du plancher, puis ramassent leurs 10 cure-dents, et les jettent à nouveau, ceci autant de fois que voulu (10 fois, 20 fois, ...). Chaque groupe obtient ainsi un nombre d'intersections pour le jet de 200 ou 400 ... aiguilles.

- L'enseignant regroupe l'ensemble des résultats obtenus et saisit sur le site https://shiny.math.cnrs.fr/semaine_des_mathematiques/ les valeurs de *a*, *b*, le nombre total de jets N et le nombre total d'intersections *n*. Obtenir 500 à 1000 lancers (voire plus) n'est pas insurmontable (nous avons obtenu 167 intersections sur 410 lancers en quelques minutes à 5 lanceurs).



Exemple de lancers de 7 cure-dents : 3 intersections avec les lignes verticales.

Remarques et consignes :

- Le rapport $\frac{a}{b}$ doit être inférieur ou égal à 1. Plusieurs expérimentations dans des classes différentes peuvent avoir des rapports $\frac{a}{b}$ différents, pourvu que l'agrégation des résultats (calcul de fréquence) concerne seulement les expérimentations avec des rapports $\frac{a}{b}$ identiques. La synthèse finale des protocoles différents se fait automatiquement sur le site internet.
- Chaque cure-dent pourrait être lancé indépendamment des autres mais c'est très long et le jet simultané a le même effet à condition que les cure-dents soient assez dispersés : une consigne devrait être de les lancer d'assez haut (ou assez fort/loin) pour garantir l'absence d'un effet mikado : ils ne doivent pas se toucher.
- Si certains résultats ne sont pas notés (par oubli), cela ne biaise pas l'analyse.
- En cas de litige sur intersection/pas intersection (ce qui arrive, mais très rarement), relancer l'aiguille, ou compter une intersection une fois sur deux.
- Vérifier régulièrement que les 10 cure-dents sont bien ramassés à chaque lancer.

L'analyse :

- si chaque groupe a les mêmes conditions expérimentales, les fréquences observées de chacun des groupes devraient fluctuer autour d'une même valeur (illustration de la fluctuation d'échantillonnage).
- si deux protocoles sont mis en place (par exemple, même cure-dents mais 2 planchers différents), les fréquences observées devraient différer : ceci peut être un argument pour l'idée de « normalisation » ci-dessous.
- Normalisation : il est assez intuitif que des cure-dents deux fois plus grands vont avoir tendance à entrainer deux fois plus d'intersections. On se convainc ainsi rapidement que la fréquence f doit être proportionnelle à a. De même, si les lames sont rapprochées et que b est divisé par 2, on s'attend à ce qu'il y ait deux fois plus d'intersections. Ainsi, f doit être inversement proportionnelle à b. f est donc proportionnelle à $\frac{a}{b}$ et on note S le coefficient de proportionnalité. Au lieu de s'intéresser à la

fréquence f, il vaut mieux considérer la fréquence « normalisée » S, ce qui permettra de travailler avec des résultats fournis par des classes différentes :

$$S = f\frac{b}{a}$$

- Développements possibles sur l'ensemble des résultats agrégés (calculs faits automatiquement par l'outil en ligne, qu'il est possible d'expliquer) :

- la fréquence observée peut conduire au calcul d'un intervalle de confiance pour la probabilité p d'intersection (un peu au programme de seconde et surtout en Terminale)
- l'intervalle de confiance pour p, peut conduire à l'intervalle de confiance pour $p \times \frac{b}{a}$.
  En effet, p appartient a I=[c,d] si et seulement si $p \times \frac{b}{a}$ appartient à J=[$c \times \frac{b}{a}$, $d \times \frac{b}{a}$]. On transforme ainsi l'intervalle de confiance I pour p en un intervalle J pour $p \times \frac{b}{a}$.
- l'intervalle de confiance précédent peut conduire à l'intervalle de confiance pour $\frac{2}{p} \times \frac{a}{b}$.
  En effet, p appartient a I=[c,d] si et seulement si $\frac{2}{p} \times \frac{a}{b}$ appartient à K = [$\frac{2}{c} \times \frac{a}{b}$, $\frac{2}{d} \times \frac{a}{b}$]
- On atteint alors l'objectif final qui est d'obtenir un encadrement pour π car on peut montrer que : $p = \frac{2}{\pi} \times \frac{a}{b}$ donc $\pi = \frac{2}{p} \times \frac{a}{b}$

- synthèse des résultats : en intégrant les résultats de la classe dans l'appli web disponible, on peut comparer ses résultats à d'autres classes, d'autres établissements... et participer à un travail collectif qui doit donner des résultats d'autant meilleurs que le nombre de participants est grand.