Faire des mathématiques à partir de leur histoire

Quelques exemples et autres idées pour le collège et le lycée

Marc Moyon
(IREM de Limoges)

27 novembre 2019

Journée IREM d'Aquitaine

Université de Limoges
INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Limoges
irem

La géométrie des carnets de croquis de Léonard

À l'origine… Milan !

Un objet exceptionnel : le *codex atlanticus*

Il s'agit d'une compilation posthume de nombreux dessins et autres notes de Léonard : plus de mille folios en 12 volumes, conservés à la bibliothèque Ambrosienne (Milan). On lui attribue son nom à cause de son grand format (64,5 $\times$ 43,5 cm) rappelant celui des atlas.

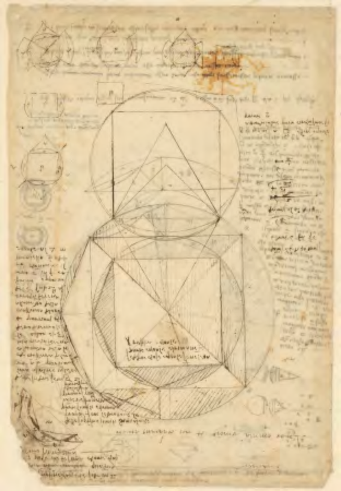



En couvrant une très longue période de la vie de Léonard de Vinci (de 1478 et 1519), le *Codex Atlanticus* illustre tout son génie : machines volantes, engins de guerre, instruments de musique, astronomie, géographie, botanique, architecture, anatomie, notes autobiographiques et considérations philosophiques.

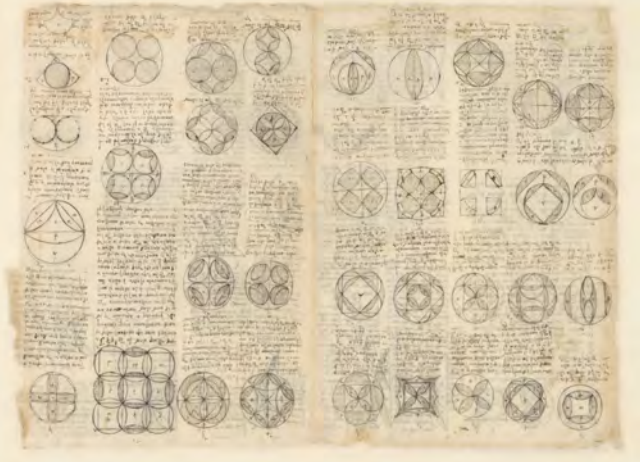
Léonard : de Vinci 1452 – à Cloux 1519

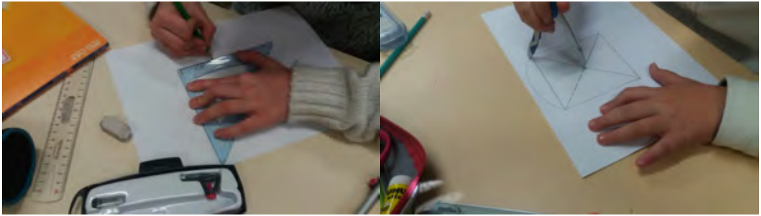
- **vers 1472** : est à Florence, élève à la *bottega* de Verrocchio
- **vers 1482** : quitte Florence pour Milan, sous la protection de L. Sforza
- **1496** : rencontre Fra Luca Pacioli (*ca*. 1445-1514) à Milan
- **1499** : quitte Milan (occupée par la France) avec Pacioli
- **1500** : retourne à Florence (début de *Mona Lisa*)
- **1506** : arrive à la Cour française de Milan
- **1511** : Français expulsés de Milan
- **1513** : Rome (sous le Pape Léon X, protecteur des Arts)
- **1515** : François I^er^ capture Milan
- **1516** : Départ pour Amboise

Deux folios mathématiques



Deux folios mathématiques





CM2, École Louis Pons, Brive (19)

6e, Collège Arsène d'Arsonval, Brive (19)

Fiche élève 6^{e}

À LA DÉCOUVERTE DE LA GÉOMÉTRIE DE *Léonard de Vinci*

Si tu ne connais pas *Leonardo da Vinci*, voici quelques informations qui accompagnent son autoportrait...

Léonard est né en 1452 à Vinci (petite ville d'Italie) et meurt à Amboise (France) en 1519. Il travaille à la cour de riches et importants princes comme Ludovic Sforza à Milan ou François I^{er} en France. Il est un des plus célèbres savants de la Renaissance grâce à ses oeuvres d'art (peintures et sculptures), ses croquis d'anatomie et de botanique, ou encore pour ses multiples inventions sans que l'on sache s'il les a vraiment réalisées. Léonard peut encore être considéré comme un mathématicien. Il a d'ailleurs eu l'occasion de travailler avec Luca Pacioli, un autre mathématicien important, pour lequel il a dessiné des figures géométriques. Malheureusement, les travaux de Léonard ne sont pas si faciles à lire car il écrivait de manière inversée de droite à gauche et en miroir !


Bib. Royale de Turin

En visitant la grande bibliothèque Ambrosienne de Milan (Italie), on peut trouver un vieux et très important livre de travaux de Léonard de Vinci. Ce livre s'appelle le *Codex atlanticus* en rapport avec ses grandes dimensions ($64,5 \times 43,5cm$) - deux fois plus grand qu'un grand cahier qu'un collégien utilise aujourd'hui.

Au dos de la feuille 471, on découvre de nombreuses constructions géométriques que le savant italien a lui-même tracées.


Extrait de *« De ludo geometrico » : la matematica e la geometria di Leonardo*, De Agostini, 2013.

Étude de la figure
Observe cette figure avec beaucoup d'attention. Pour cela, tu peux repérer les figures élémentaires et les nommer. Si besoin, tu peux repasser leur contour en couleur.

Reproduction de la figure
Construis-la à l'aide des instruments adaptés.

Écriture d'un texte de construction
Raconte les différentes étapes de cette construction.

À LA DÉCOUVERTE DE LA GÉOMÉTRIE DE *Léonard de Vinci*

Si tu ne connais pas *Leonardo da Vinci*, voici quelques informations qui accompagnent son autoportrait...

Léonard est né en 1452 à Vinci (petite ville d'Italie) et meurt à Amboise (France) en 1519. Il travaille à la cour de riches et importants princes comme Ludovic Sforza à Milan ou François I^{er} en France. Il est un des plus célèbres savants de la Renaissance grâce à ses oeuvres d'art (peintures et sculptures), ses croquis d'anatomie et de botanique, ou encore pour ses multiples inventions sans que l'on sache s'il les a vraiment réalisées. Léonard peut encore être considéré comme un mathématicien. Il a d'ailleurs eu l'occasion de travailler avec Luca Pacioli, un autre mathématicien important, pour lequel il a dessiné des figures géométriques. Malheureusement, les travaux de Léonard ne sont pas si faciles à lire car il écrivait de manière inversée de droite à gauche et en miroir !


Bib. Royale de Turin

En visitant la grande bibliothèque Ambrosienne de Milan (Italie), on peut trouver un vieux et très important livre de travaux de Léonard de Vinci. Ce livre s'appelle le *Codex atlanticus* en rapport avec ses grandes dimensions ($64,5 \times 43,5cm$) - deux fois plus grand qu'un grand cahier qu'un collégien utilise aujourd'hui.

Au dos de la feuille 471, on découvre de nombreuses constructions géométriques que le savant italien a lui-même tracées.

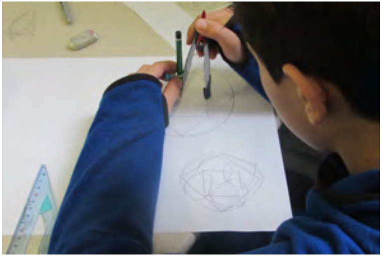

Extrait de *« De ludo geometrico » : la matematica e la geometria di Leonardo*, De Agostini, 2013.

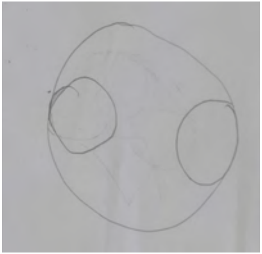
Étude de la figure
Observe cette figure avec beaucoup d'attention. Pour cela, tu peux repérer les figures élémentaires et les nommer. Si besoin, tu peux repasser leur contour en couleur.

Reproduction de la figure
Construis-la à l'aide des instruments adaptés.

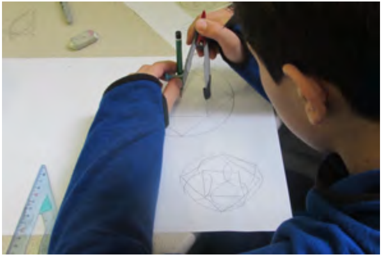
Écriture d'un texte de construction
Raconte les différentes étapes de cette construction.

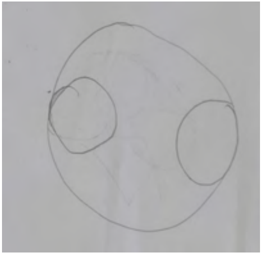
Des difficultés d'observation





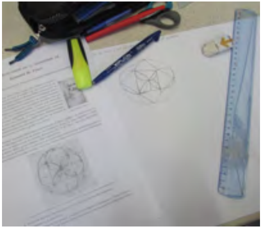
Des difficultés d'observation

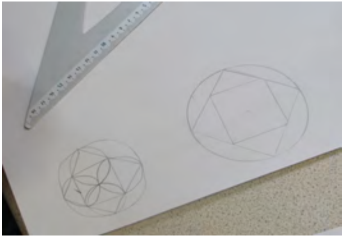




Recherche des points caractéristiques de la figure, des alignements, des points de contact.

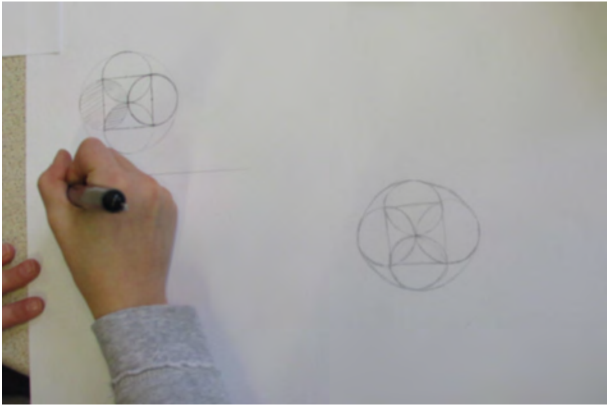
Des difficultés de réalisation



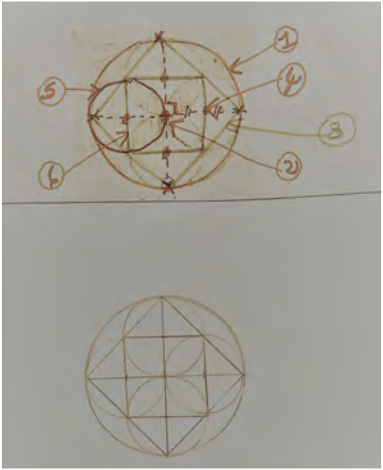


À main levée comme avec les instruments –> différenciation

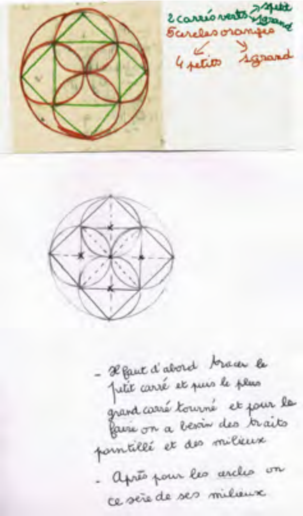
Un travail raisonné à main levée et avec les instruments



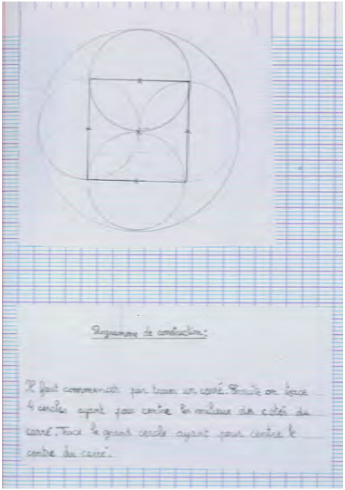
Production d'une narration de construction



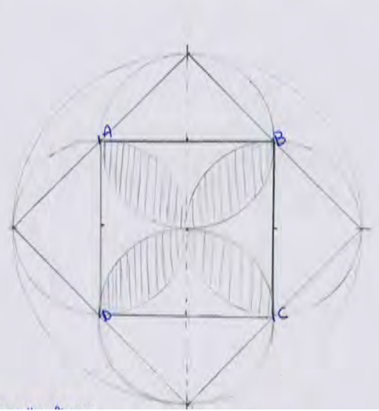
Production d'une narration de construction



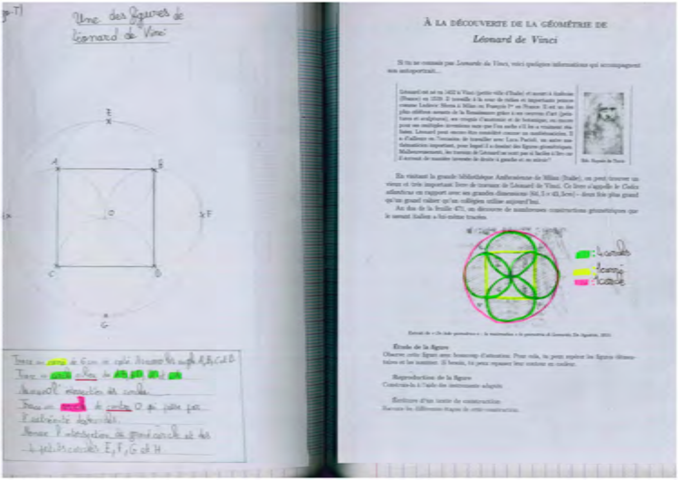
Production d'une narration de construction



Production d'une narration de construction



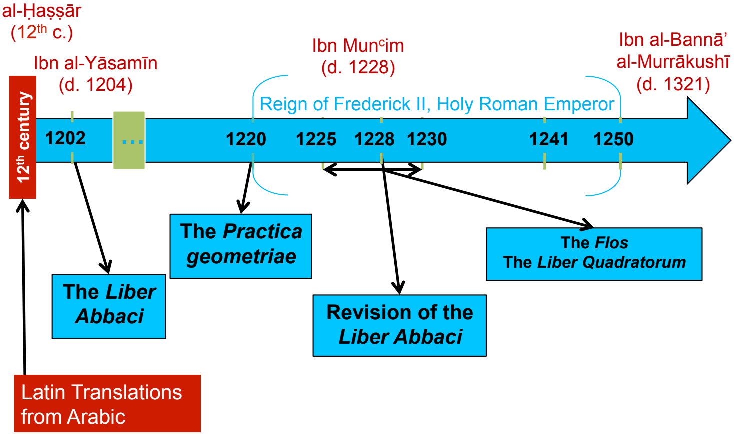
Production d'une narration de construction



Compétences visées

- Représenter
  - Reproduire des figures à partir d'un modèle, et d'éléments déjà tracés (en jouant sur certaines variables didactiques)
  - Construire des figures simples ou complexes comme assemblage de figures simples (juxtaposées ou superposées)
- Raisonner
  - Passer de la perception au contrôle par les instruments en s'appuyant sur les propriétés des figures
  - Caractériser les figures « usuelles »
  - Progresser collectivement dans une investigation
- Communiquer
  - Reconnaître, nommer, décrire en utilisant le vocabulaire approprié
  - Expliquer sa démarche, comprendre les explications d'une autre et argumenter dans l'échange

Algorithmes et mathématiques récréatives dans le *Liber Abaci* de Fibonacci



Un des manuscrits connus

ms. Palat. Vat. 1343 *Liber Abbaci*

Problème d'âge

Une personne vécut un certain temps.
Si elle avait vécu en plus autant qu'elle vécut, et encore autant, puis $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ de ce qu'elle a vécu, et encore un an en plus, elle aurait vécu 100 ans.
On cherche combien de temps elle vécut.

$(100, 1) \rightarrow 100 - 1 = 99$
Pose 12.
$\rightarrow 12 + 12 + 12 + (\frac{1}{4}+\frac{1}{3}).12 = 43$

Pour 12 ans, on atteint 43 ans. Pour 99 ans ?
$\rightarrow 12 \times 99 = 1188$
$\rightarrow 1188 \div 43 = 27 + \frac{27}{43}$ ou $\rightarrow 99 \div (\frac{1}{4}+\frac{1}{3})3[= 27 + \frac{27}{43}]$

Le jour inconnu

Si tu veux savoir en quel jour quelqu'un a embrassé son amie, dis-lui de doubler le jour, d'ajouter 1, de multiplier le tout par 5, puis le résultat par 10, et de soustraire 50 de toute la somme.
Demande ensuite combien de fois on peut certainement soustraire 100 de toute la somme.

Si c'est une fois, ce sera dimanche, si deux, lundi, si trois, mardi et ainsi de suite.

$$
\begin{aligned}
j &\to j \times 2 \\
&\to j \times 2 + 1 \\
&\to (j \times 2 + 1) \times 5 \\
&\to ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 \\
&\to ((j \times 2 + 1) \times 5) \times 10 - 50
\end{aligned}
$$

Le problème du verger

Quelqu'un a cueilli des fruits dans un verger auquel on accède par 7 portes successives.
Lorsqu'il a voulu en sortir, il lui a fallu donner au premier gardien la moitié de tous les fruits et un en plus.
Au second gardien, la moitié des fruits restants et un en plus.
Il a dû en donner aux cinq autres gardiens de la même manière.
Il ne lui resta plus alors qu'un seul fruit.
On demande combien de fruits du verger cette personne a cueillis.

Le problème du verger

$1 \to 1 \to 1 + 1 = 2 \to 2 \times 2 = 4$

$4 \to 1 + 1 = 5 \to 5 \times 2 = 10$

$1 \to 1 + 1 = 2 \to 2 \times 2 = 4$

$4 \to 4 + 1 = 5 \to 5 \times 2 = 10$

$10 \to 10 + 1 = 11 \to 11 \times 2 = 22$

$22 \to 22 + 1 = 23 \to 23 \times 2 = 46$

$46 \to 46 + 1 = 47 \to 47 \times 2 = 94$

$94 \to 94 + 1 = 95 \to 95 \times 2 = 190$

$190 \to 190 + 1 = 191 \to 191 \times 2 = 382$

et le total est le nombre de pommes ; **et ceci en renversant l'ordre qui a été proposé, tu seras capable de résoudre tout problème similaire**.

En classe (fin de cycle 4) : autre méthode

Deuxième solution

Autrement, pose ce que la personne a cueilli au départ comme la chose.

Elle en enlève la moitié à la première porte et 1 fruit. Il reste alors $\frac{1}{2}$ chose moins 1.
À la seconde porte, il en enlève la moitié et un fruit : il reste alors un quart de chose moins $(1+\frac{1}{2})$ de fruits.
À la troisième porte, il en enlève la moitié et un fruit. C'est pourquoi il reste $\frac{1}{8}$ de choses moins $(1+\frac{3}{4})$ de fruits dont il donne à la quatrième porte la moitié et un fruit.
Et ainsi, il en reste $\frac{1}{16}$ de choses moins $(1+\frac{7}{8})$ de fruits dont il reste $\frac{1}{32}$ de choses moins $(1+\frac{15}{16})$ lorsqu'à la cinquième porte, il donne la moitié et un fruit ajouté.
Il en donne sa moitié et un fruit ajouté à la sixième porte, il reste $\frac{1}{64}$ de choses moins $(1+\frac{31}{32})$ de fruits.
De cela alors, lorsqu'il en donne la moitié et un fruit ajouté à la septième porte, il reste $\frac{1}{128}$ de choses moins $(1+\frac{63}{64})$ de fruits qui sont égaux à un fruit.
C'est évidemment ce qu'il reste après être sorti des sept portes.

Si un fruit est ajouté à $(1+\frac{63}{64})$, il en vient que : $\frac{1}{128}$ de choses sont égales à $(2+\frac{63}{64})$ de fruits.
C'est pourquoi on multiplie $(2+\frac{63}{64})$ par 128, il y aura semblablement 382 fruits.

À partir de *Fibonacci : extraits du Liber Abaci*, présenté par Marc Moyon, 2016, pp. 33-36.

1. Lis la deuxième solution proposée par Fibonacci. En quoi est-elle différente de la première ?
2. À quoi correspond ce que Fibonacci appelle « la chose » ? Quelle mathématique utilise-t-il ici ?
3. Traduis cette solution en langage mathématique d'aujourd'hui.

1. Lire la solution proposée par Fibonacci. Quelles sont les différences avec la première ?
2. Qu'est-ce que, pour Fibonacci, la « chose » ? Quelles mathématiques utilise-t-il ?
3. Traduire la solution dans un langage mathématique moderne.

Suivant la méthode algébrique,

1. $x-(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{2}x-1$
2. $\frac{1}{2}x-1-[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-1)+1]=\frac{1}{4}x-(1+\frac{1}{2})$
3. $\frac{1}{4}x-(1+\frac{1}{2})-[\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x-(1+\frac{1}{2}))+1]=\frac{1}{8}x-(1+\frac{3}{4})$
4. ...
5. ...
6. ...
7. $\frac{1}{128}x-(1+\frac{63}{64})$

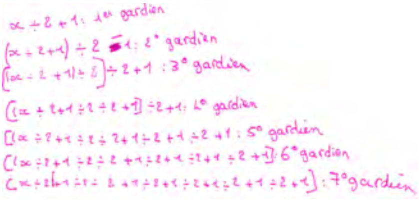
On obtient l'équation linéaire :

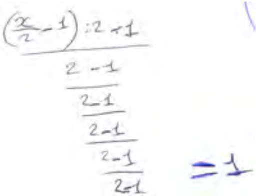
$$\frac{1}{128}x-(1+\frac{63}{64})=1$$

irem

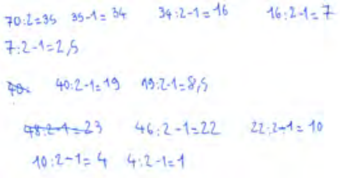
En classe (fin de cycle 4) : quelques travaux

Par une méthode algébrique

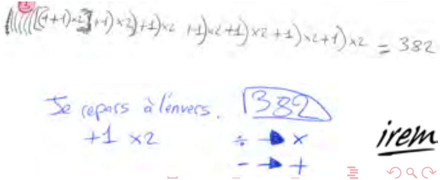




Par essais/erreurs



En raisonnant sur les nombres



En classe (fin de cycle 4) : quelques travaux

Fruit au début ? → la moitié des fruits et un en + → la moitié des fruits restants et un en + → le même chose 5 fois de suite → 1

4 − 3 = 1

Donc 7 fois − la moitié des fruits

7e gardiens : 3	(4 + 1) × 2 : 10
6e gardiens : 10	(10 + 1) × 2 : 22
5e gardiens : 22	(22 + 1) × 2 : 46
4e gardiens : 46	(46 + 1) × 2 : 94
3 " : 94	(94 + 1) × 2 : 190
2 " : 190	(190 + 1) × 2 : 382
1 " : 382	

Au depart il avait 382 fruits

On choisit un nombre x
- on y ajoute 1
- on multiplie le resultat par 2

on répète ce programme 7 fois.

Ce programme est valable, non seulement pour ce problème, mais aussi pour n'importe quelle situation semblable.
Par exemple, donné le tier à la place de la moitie :
franchir 5 portes au lieu de 7.
donné 2 fruits au lieu de 1.
reste 2 fruits au lieu de 1.

7e gardien	2 fruits	1, 1 + 1
6e gardien	4 fruits	1 × 2 + 1
5e gardien	8 fruits	4 × 2 + 1
4e gardien	16 fruits	8 × 2 + 1
3e gardien	32 fruits	16 × 2 + 1
2e gardien	64 fruits	32 × 2 + 1
1er gardien	128 fruits	64 × 2 + 1

Il avait 254 fruits au départ
254 − 1 − 1 − 1 − 1 − 1 − 1 − 1 = 247 fruits

7 portes = 7 gardiens

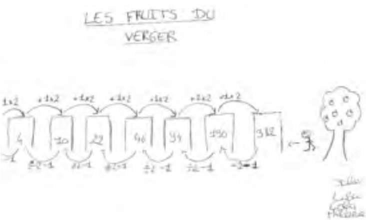
1er gardien = la moitier de tous les fruits + 1 en plus
2ème gardien = la moitier des fruits restant + 1 en plus

...

reste 1 pour lui

4 − 3 = 1 → il reste un fruit pour lui
→ il en donne 3 au dernier gardien

Dans une autre classe (début de cycle 4)



Fibonacci : « et ceci en renversant l'ordre qui a été proposé, tu seras capable de résoudre tout problème similaire ».

3) • On choisit un nombre x
  – on y ajoute 1
  – on multiplie le résultat par 2
On répète ce programme 7 fois.

4) Ce programme est valable, non seulement pour ce problème, mais aussi pour n'importe quelle situation semblable.

Par exemple, donné le tiers à la place de la moitié :
  franchir 5 portes au lieu de 7.
  donné 2 fruits au lieu de 1.
  reste 2 fruits au lieu de 1.

• reste 2 fruits
  – 5ème gardien : $(2+2)\times 3=12$
  – 4ème gardien : $(12+2)\times 3=42$
  – 3ème gardien : $(42+2)\times 3=132$
  – 2ème gardien : $(132+2)\times 3=402$
  – 1er gardien : $(402+2)\times 3=1212$

On répète le programme 5 fois.

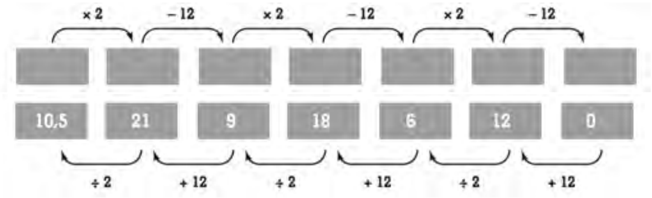
irem

Algorithmique avec Scratch

Commerce à Lucques, Florence et Pise

Un homme partit commercer à Lucques, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Puis il quitta cette ville pour se rendre à Florence. Il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Lorsqu'il revint à Pise, il y fit le double et y dépensa 12 deniers.
Et il est proposé que rien ne lui resta.
On demande combien il possédait au départ de son voyage.

Commerce à Lucques, Florence et Pise



Le problème du verger dans le *Liber augmenti et diminutioni*

1. Il y a 3 portes ; l'homme donne la moitié et deux fruits en plus ; il lui reste 1 fruit à la sortie.
2. Il y a 3 portes ; l'homme donne la moitié et quatre (resp. 6, 8) fruits en plus au premier (resp. au second, troisième) ; il ne lui reste aucun fruit à la sortie.
3. Il y a 3 portes ; l'homme donne la moitié et le premier gardien (resp. le second, le troisième) lui donne en retour 2 (resp. 4, 6) fruits ; il lui reste 10 fruits à la sortie.

Ici, l'auteur (inconnu) utilise trois méthodes différentes : la méthode inverse, l'algèbre et la méthode de double fausse position.

Le problème du verger pour des élèves plus avancés

On peut définit une suite :

$\forall n \geq 0,$

$$\begin{cases} u_0 = ? \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 1 \end{cases}$$

C'est une suite arithmético-géométrique de terme général :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{1}{2^n}(u_0 + 2) - 2$$

$u_7 = \frac{1}{128}(u_0 + 2) - 2 = 1$
$\frac{1}{128}(u_0 + 2) = 3$
$u_0 = 3 \times 128 - 2$
$u_0 = 382$

Le problème du verger pour des élèves plus avancés

Ou, par l'algèbre, le nombre de fruits restant est donné par :

$$\forall n \geq 0,\ f_n = \frac{1}{2^{\text{n}}}x - \left(1 + \frac{2^{\text{n-1}} - 1}{2^{\text{n-1}}}\right)$$

ou (écriture réduite), $f_n = \frac{1}{2^{\text{n}}}x - \frac{2^{\text{n}} - 1}{2^{\text{n-1}}}$

Une récurrence élémentaire peut le prouver facilement.

$f_7 = \frac{1}{128}x - \frac{127}{64} = 1$
$\frac{1}{128}x - \frac{127}{64} = 1$
$\frac{1}{128}x = 1 + \frac{127}{64}$
$x = 128 \times (1 + \frac{127}{64}) = 382$

Bagdad, 9e siècle

Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala

[Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison]

J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr wa-l-muqābala, selon trois modes qui sont : les racines, les carrés, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré. [...]

$$x^2 = px\,;\; x^2 = q\,;\; px = q$$

J'ai trouvé que ces trois modes [...] se combinent, et on aura les trois **genres combinés**, qui sont : des carrés plus des racines sont égaux à un nombre, des carrés plus un nombre sont égaux à des racines et des racines plus un nombre sont égaux à des carrés.

$$x^2 + px = q\,;\; x^2 + q = px\,;\; px + q = x^2 \text{ avec } p, q \in \mathbb{Q}_+^*$$

irem

Les carrés plus les racines égaux à un nombre $[x^2 + px = q]$, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams $[x^2 + 10x = 39]$ [...].
Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; il vient, dans ce problème, **cinq**, que tu multiplies par lui-même ; on a **vingt-cinq** ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura **soixante-quatre** ; tu prends la racine qui est **huit**, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste **trois**, qui est la racine du carré que tu veux, et le carré est neuf.

$$10/2 \to \mathbf{5}; 5 \times 5 \to \mathbf{25}; 25 + 39 \to \mathbf{64}; \sqrt{64} \to \mathbf{8}; 8 - 5 \to \mathbf{3}$$
$$x = 3 \text{ et } x^2 = 9$$

Cum rebus censum si quis dragmis dabit equm
Res quadra medias quedratis adice dragmas
Radici quorum medias res excipe demum
Et residuum quesiti census radicem ostendet.

Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses,
Carre la moitié des choses. Ajoute le carré aux drachmes.
De la racine, soustrais alors la moitié des choses.
Et le reste montrera la racine du bien cherché.

Le *Liber restauracionis, 13*[e] *s.*

$[x^2 + px = q]$	Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses,
$(\frac{p}{2})^2$	Carre la moitié des choses.
$(\frac{p}{2})^2 + q$	Ajoute le carré aux drachmes.
$\sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$	De la racine, soustrais alors la moitié des choses.
$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$	Et le reste montrera la racine du bien cherché.

Le *Liber restauracionis, 13*^{e} *s.*

Si on dit : soit un terrain triangulaire, dont deux des côtés sont dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, à l'intérieur duquel se trouve un terrain carré, combien est le côté de ce terrain carré ?

Tu as multiplié le tiers d'un bien plus un dirham par son quart plus un dirham. On a vingt.

$(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 1) = 20$

Tu divises dix en deux parties, tu multiplies chaque partie par elle-même et tu additionnes les produits. On a cinquante-huit dirhams.

Partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$) telles que $x^2 + y^2 = 58$.

Soient deux biens entre lesquels il y a deux dirhams ; tu divises le petit par le grand ; le quotient revient à un demi-dirham.

Soient deux nombres x et y ($y - x = 2$) tels que $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Merci de votre attention

marc.moyon@unilim.fr