L'expérimentation présentée concernait une évaluation par problèmes longs en bases de l'analyse en L1. L'élaboration des problèmes et l'analyse des résultats ont été faites dans le cadre de l'IREM (groupe REMSup) avec Annie Berté (retraitée IUFM), Jean-Yves Boyer (IPB), Marie-Line Chabanol (UB), Joelle Chagneau (enseignante en lycée), Ghislaine Godinaud (UB), Chantal Menini (UB) et Jean-Jacques Ruch (UB).

1 Objectifs de l'évaluation par problèmes longs, L1

Nous avions souhaité expérimenter dans le cadre du contrôle continu du semestre 1, le remplacement des tests par des problèmes longs résolus en groupes de 3 ou 4 étudiants.

Les bienfaits que nous attendions a priori de ce type d'évaluation étaient d'une part de développer le travail en petits groupes, et surtout de permettre aux étudiants de pratiquer les mathématiques eux-mêmes et non de tenter de reproduire des « exercices types ». Les bienfaits attendus d'un problème long travaillé en groupe étaient :
- de les obliger à argumenter leur démarche auprès des autres membres du groupe,
- d'essayer plus facilement grâce à l'émulation du groupe,
- de se concentrer dans le temps avec davantage de questions ayant un lien entre elles,
- de rédiger une solution avec soin.

Nous espérions par là les rendre plus actifs, avoir une évaluation plus formative que normative, dans la mesure où l'enseignant est présent pour observer les progrès de chaque groupe et l'activité de chacun au moment de la recherche voire au début de la rédaction. De plus même si cette note compte peu, elle pouvait être un facteur encourageant puisque dans ce cas un travail sérieux permet d'avoir une bonne note. Un problème avec une dernière partie « facultative » pouvait aussi permettre une progressivité et différentiation dans l'évaluation. Selon le problème à traiter l'usage des outils numériques dans des buts de calcul, simulation ou conjecture pouvaient aussi trouver toute leur place.

Lors de la construction des problèmes nous avons de plus cherché à les amener à faire des mathématiques en les incitant à
- réviser les connaissances, capacités, compétences, savoir et savoir-faire au programme du lycée ;
- étudier et appliquer les cours reçus à l'université en leur donnant du sens : pour cela, ils ont été avertis à l'avance de la notion sur laquelle portera le devoir et des questions de cours sont posées dans le problème. Ils disposent pendant la recherche de documents de cours (y compris internet sur leur téléphone mais ils s'en servent très peu) et de quelques livres de terminale S qui leurs ont été fournis ou qu'ils ont amené eux-mêmes ;
- travailler dans différents cadres, c'est-à-dire différents domaines des mathématiques [1] (algébrique, géométrique, analytique)

2 Organisation

Les problèmes ont été posés simultanément dans deux classes de Base de l'Analyse (semestre 1, MISMI). Ils ont été notés et leur moyenne compte pour 0.15 dans le calcul de la note finale de

1. Régine Douady, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathémtiques*, thèse d'Etat, Université de Paris VII, 1984

l'Unité d'Enseignement.

Le travail des étudiants s'est effectué en groupes de 3 ou 4 pour le premier problème, groupes de 3 maximum pour le second. La composition des groupes a été laissée au libre choix des étudiants.

A chaque fois la taille de la salle a permis de regrouper les tables tout en laissant de la place pour la circulation de l'enseignant.

Les étudiants avaient été avertis de ce mode de travail une semaine avant et certaines consignes avaient été données à cette occasion (chapitres de terminale à revoir pour le problème 1, liste de savoirs/savoirs-faire distribuée pour le problème 2). Les étudiants pouvaient amener des ouvrages, leurs cours et disposaient d'une calculatrice "type collège".

La durée était de 2 fois 1h20 séparées par 10mn de pause que les étudiants ont pris de façon systématique pour le problème 1, non systématique pour le problème 2.

A chaque fois le texte du problème était trop long pour être traité par un étudiant moyen dans le temps imparti. Pour le premier problème ils pouvaient rendre l'intégralité de la partie obligatoire 4 jours plus tard (dont un week-end). Pour le deuxième problème, ils devaient rendre deux parties à la fin de la séance de travail et la troisième partie 5 jours plus tard (dont un week-end). Une seule rédaction par groupe était demandée.

Pour la partie à terminer hors classe du deuxième problème il a été proposé un aller-retour de correction.

3 Des observations plus précises pour chaque problème

3.1 Problème 1

Ce problème (annexe 1) a été construit à partir d'un texte de vulgarisation mathématique trouvé sur le site Accromath. Le texte source (http ://accromath.uqam.ca/2011/06/probabilites-statistiques-et-populations-des-poissons/) avait été distribué aux étudiants une semaine auparavant et consigne donnée de lire la partie qui allait nous servir.

Il fait appel aux connaissances de terminale sur les suites et il a été fait en préambule du cours sur les suites qui est prévu en bases de l'analyse. La rentrée universitaire avait eu lieu 3 semaines plus tôt.

Bien que ne faisant appel qu'à des connaissances du secondaire ce problème est formulé de façon plus universitaire, on y notera en particulier la présence des quantificateurs, la part importante des paramètres, la notation ensembliste de l'inclusion, la composition de fonctions.

Il y avait dans ce problème des points d'appels, ils ont été respectés par les étudiants qui de plus n'ont pas hésité à solliciter l'enseignant pour d'autres vérifications ou questions. De plus la circulation facile entre les groupes à permis à l'enseignant de bien suivre l'évolution du travail et d'attirer l'attention d'un groupe s'il voyait une erreur grave. Sans cela il aurait fallu des points d'appels plus rapprochés.

Les étudiants ont été actifs durant la quasi totalité des 2h40, avançant à leur rythme, une "baisse de régime" s'est tout de même fait sentir environ 10 minutes avant la fin.

Certains groupes ont rédigé au fur et à mesure d'autres n'ont travaillé qu'au brouillon.

Le seul moment où l'enseignant a dû faire une intervention collective au tableau était pour expliquer la signification de $f(I)$ lorsque I est un ensemble.

Dans une des deux classes, quelques étudiants ont utilisé leur ordinateur personnel pour le tracé de courbes avec le logiciel de géométrie dynamique Géogebra.

Quelques difficultés mathématiques à remarquer

— Bien que disposant d'ouvrages de terminale, la représentation graphique de la suite (X_n) $(X_{n+1} = f(X_n))$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction f a souvent été faite avec l'aide de l'enseignant. Les étudiants avaient des souvenirs imprécis de cheminement qui n'ont pas été éclairés par les questions D3 et D4 pourtant prévues pour cela.

— Une difficulté de calcul fréquente et inquiétante : plusieurs groupes ont peiné à simplifier $\frac{1.4}{2\times(-\frac{0.4}{M})}$.

— Le modèle "monotone" pour les suites puisque fréquemment la réponse à la question *Ce qui vient d'être fait permet-il d'en déduire que la suite converge ?* la réponse a été *non car on n'a pas montré qu'elle était monotone.*

Le texte était trop long, aucun groupe n'avait fini les préliminaires au bout d'1h20. En fin de séance la plupart des groupes en étaient aux questions 1.4 - 1.6. La charge de travail à la maison dans un temps contraint était trop importante.

Les retours écrits ont été décevants en particulier pour la partie non traitée en classe : beaucoup de recopie, des qualités de rédaction et d'argumentation insuffisantes.

Deux groupes ont rendu la partie 3 qui était facultative.

Le lien avec l'article n'a pas été assez souligné dans la rédaction du sujet qui a été jugé par certains étudiants comme un "habillage". En particulier ils n'ont pas recherché des informations utiles pour certaines questions du problème (parties 1 et 2).

3.2 Problème 2

Ce problème (annexe 2) a été posé en semaine 48 soit après 10 semaines d'enseignement. Il arrivait après le cours sur les fonctions réciproques et le cours d'intégration avait été entamé.

Il a pour but de réinvestir les connaissances récentes sur les applications réciproques sous le double point de vue analytique et algébrique (parties 1 et 2). La troisième partie à partir d'une courbe rencontrée dans leur quotidien (la chaînette) est plus ouverte. Elle donnera lieu à un travail simple d'intégration et à l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'une solution.

Une semaine auparavant avait été distribuée une liste de compétences, savoirs, savoirs-faire (annexe 3). Les étudiants sont arrivés avec leurs cours ou fiches sur les points indiqués dans cette liste, certains n'ayant pas compris pourquoi on indiquait aussi "longueur d'un segment" n'avaient pas pris la peine de faire des recherches pour retrouver comment cette longueur pouvait être calculée.

Le problème a été correctement calibré, les parties 1 et 2 devant être rendue en fin de séance les étudiants ont rédigé au fur et à mesure. Les plus lents ont fini de rédiger ce qu'ils savaient faire sur les parties 1 et 2 juste à temps, même les plus rapides n'avaient qu'entamé la partie 3 car la question II.5 a été une question butoir. Les étudiants ont été actifs jusqu'au bout (voire très actifs pour ceux qui avaient pris un peu de retard de rédaction).

Il n'y avait pas dans ce problème de point d'appel mais consigne avait été donnée de faire vérifier les résultats en fin de chaque partie, ce qui a d'ailleurs permis de donner des piste pour reprendre certaines questions mal résolues ou rédigées. Les étudiants en ont tenu compte ou pas. A nouveau la circulation facile de l'enseignant permettait aussi des interventions à la demande des étudiants ou lorsqu'une grosse erreur était vue.

La troisième partie devait être rendue 5 jours plus tard (dont un week-end) et un va et vient de correction était proposé pour cette partie. Une première correction notée avec commentaires et indications des points qui pouvaient être améliorés, les groupes pouvant rendre à nouveau leur travail en les prenant en compte. Seuls 8 groupes (sur 14) ont profité de cette possibilité. Seulement deux groupes ont notablement amélioré leur travail, pour les autres certains ont indiqué aux enseignants que les indications n'ont pas suffit à les aider à trouver la solution, d'autres qu'ils n'y avaient passé que très peu de temps.

Quelques difficultés mathématiques ou de compréhension à remarquer

1. Le terme "schéma d'étude" a posé problème, incompréhension ou bien compris comme "graphe". Une fois l'explication donnée, le recours au cours est nécessaire pour la plupart, bien que ce schéma ait déjà été appliqué avec plusieurs exemples ils ne l'ont pas encore mémorisé.
2. L'expression "plus grand intervalle au sens de l'inclusion" a due être expliquée, bien que la relation d'ordre soit travaillée dans une autre unité d'enseignement.
3. La question I.4.b (calcul de la dérivée de argch) a nécessité de nombreux coups de pouce.
4. La définition d'une bijection n'est pas encore donnée naturellement (bien que travaillée de façon formelle dans une autre unité d'enseignement).
5. La question II.4. a été une question butoir pour le choix de la solution de l'équation du second degré à exclure. S'ils ont fini par voir qu'il fallait discuter de la position des deux solutions par rapport à 1, la plupart n'ont pas trouvé d'argument. Dans une classe l'utilisation du produit des racines n'a jamais été utilisé, un groupe a travaillé par équivalence, un autre a étudié les variations de la fonction $y \mapsto y - \sqrt{y^2 - 1}$. Dans l'autre classe un rappel ayant été fait en début d'année, le produit des racines a été utilisé et la discussion dans l'ensemble a été bien menée.
6. Ce n'est pas un problème mais plutôt une réussite "surprise", le changement d'inconnue dans l'équation et la présence du paramètre y n'ont pas soulevé de difficulté.

4 Pour l'avenir

4.1 Motivations des adaptations entre les problèmes 1 et 2

Pour le problème 1 (annexe 1) le texte beaucoup trop long a eu comme biais principal qu'une partie importante du travail que nous aurions aimé pouvoir accompagner en séance a été fait hors classe et surtout a été fait de façon originale par peu de groupes ; les autres se contentant de recopier les questions qu'ils n'arrivaient pas à résoudre.

Nous avons donc été plus vigilants à la longueur du second problème (annexe 2) et avons distribué la liste de savoir, savoir-faire et compétences (annexe 3) afin de préciser nos attentes. Nous avons aussi imposé un travail plus scolaire puisqu'un écrit était à rendre dès la fin de la séance sans pouvoir revenir dessus (comptant pour 3/4 de la note finale). La partie à rédiger hors classe était aussi beaucoup plus courte (comptant pour 1/4 de la note finale).

Nous avons aussi souhaité ôter la pression de la note et nouvelle tentation de recopie pour la partie restante à faire en proposant l'aller-retour de correction et effectivement les travaux rendus ont été différents, certains incomplets ce qui laisse penser qu'ils étaient originaux.

Nous avons été satisfaits de cette adaptation.

4.2 Les points communs entre les deux problèmes

Des questions de cours ou applications directe du cours qui ont permis de ré-activer d'anciennes connaissances ou savoir-faire, d'étudier et appliquer les cours reçus récemment en leur donnant du sens sont à conserver.

Nous leur avons fait résoudre, à certains moments, une même question dans deux cadres différents. Pour le problème 2 cadre analytique puis cadre algébrique pour calculer la dérivée d'une fonction réciproque ou cadre géométrique puis cadre analytique pour calculer la longueur d'un segment. D'une façon moindre, dans le problème 1, le comportement de la suite était vue de façon graphique et numérique. Ceci souligne la cohérence des mathématiques, les possibilités de contrôle de ses résultats, les différentes voies possibles lors de la recherche d'un problème (si on ne trouve pas dans un cadre, on cherche dans un autre cadre) est aussi à développer autant que possible.

Les deux problèmes ont aussi été l'occasion de leur montrer l'utilité des mathématiques dans la modélisation du réel et donc les rapports entre les mathématiques et les autres sciences (physiques, naturelles, économique ...). Les deux exemples ont été pris de sorte que les étudiants se sentent concernés par le problème et il était proposé à ceux qui voulaient en savoir plus d'aller chercher sur internet une documentation intéressante.

Pour les étudiants un travail actif durant les deux séances et une importante interaction entre-eux et avec l'enseignant.

Pour l'enseignant, l'observation sur la durée du travail des étudiants a permis de mettre le doigt sur certaines difficultés, donner des explications complémentaires directement. Hélas le manque de temps ne permet pas lors d'une séance suivante de refaire un travail spécifique dessus.

4.3 A améliorer

A noter tout d'abord que les attentes a priori, avec les aménagements entre les deux problèmes, ont globalement été celles observées. Il n'en demeure pas moins qu'il y a des points à améliorer et des nœuds difficiles à dénouer.

Le premier problème était très directif, il n'y avait pas de place laissée à la conjecture, pour remédier à cela il ne faudrait pas donner le texte du problème en un seul coup mais par moments du moins le construire avec eux.

Le travail de conjecture avec les outils numériques n'a pas non plus été travaillé, cela aurait pu sans problème trouver sa place dans le problème 1. On ne peut atteindre tous les objectifs sur un même travail, ce type de travail n'est pas pour l'instant valorisé dans l'évaluation des devoirs surveillés de l'unité d'enseignement, il aurait fallu demander à chaque groupe d'amener un ordinateur portable. Il faut tout de même essayer de travailler un peu plus dans ce sens sur un prochain problème.

La qualité de rédaction, même avec des aides en séance les étudiants peinent à donner une rédaction soignée mathématiquement. Ils ont beaucoup de difficultés à trouver le niveau de justification attendu, c'est un point important qu'il faut travailler en dosant la longueur du travail écrit demandé afin d'espérer une progression.

La note : même pour une note qui compte très peu, beaucoup de recopie pour le problème 1 ; sans un travail ramassé dès la fin aurait-ils travaillé au même rythme pour le problème 2 ? La possibilité d'aller-retour a été assez peu exploitée sérieusement, manque d'intérêt, manque de temps ou une note déjà suffisamment bonne pour qu'ils ne se donnent pas la peine d'améliorer leur travail ?

5 Annexes

5.1 Annexe 1 : Problème 1

Présentation du problème

Le but de ce problème va être d'étudier dans des cas particuliers la suite définie par la relation

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + rX_n(1 - \frac{X_n}{M}) - C \\ X_0 > 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où r, M et C sont des paramètres réels.

Cette suite modélise une population de poissons (en tonnes) soumise à une pêche constante, c'est le modèle de Schaefer qui est présenté au début de l'article

http ://accromath.uqam.ca/2011/06/probabilites-statistiques-et-populations-des-poissons/

La modélisation de la population sans pêche ($C = 0$) suit ici le modèle de Verhulst qui date du milieu du XIX ième siècle.

Nous allons dans la partie 1 étudier cette suite lorsqu'il n'y a pas de pêche ($C = 0$), dans la partie 2 chercher la valeur maximale possible pour C afin que la population de poissons tende vers une valeur non nulle, enfin dans la partie 3 nous prendrons à nouveau $C = 0$ et une autre valeur de r et verrons que le comportement de la suite est différent des cas précédemment étudiés.

Préliminaires

A. Donner :
- la définition d'une suite croissante
- la définition suite décroissante
- la définition suite majorée
- la définition suite minorée

— les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx$.

B. On considère la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + ru_n \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

avec $r > -1$. Identifier de quel type de suite il s'agit puis donner le comportement de la suite (u_n) en fonction des valeurs du paramètre r.

C. Soient I et J deux ensembles, traduire mathématiquement en utilisant des inclusions d'ensembles l'assertion

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in J.$$

D1. Dans un repère orthogonal on s'intéresse à la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = x + 0.4x(1 - \frac{x}{M}) \tag{2}$$

Quel est le nom de cette courbe, donner une équation de son axe de symétrie, donner les coordonnées de son sommet.

D2. Donner l'allure de la courbe en choisissant une valeur pour le paramètre M.

D3. Pour la suite (1) on prend $r = 0.4$ et $C = 0$, donner une relation liant X_n, X_{n+1} et f. Que pouvez-vous dire du point de coordonnées (X_n, X_{n+1}) ?

D4. En utilisant le graphe de la fonction f et la première bissectrice, construire graphiquement les premiers termes de la suite (X_n) toujours dans le cas particulier où $r = 0.4$ et $C = 0$, on pourra prendre $X_0 = \frac{M}{2}$.Que se passe t-il lorsque $X_0 = M$?

D5. Tracer sur le graphe de f tous les points dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

Appeler l'enseignant pour faire contrôler vos résultats.

Partie 1 Dans cette partie, nous étudions l'évolution de la suite (X_n) lorsqu'il n'y a pas de pêche et un taux intrinsèque de croissance égal à 0.4, c'est-à-dire afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 0.4X_n(1 - \frac{X_n}{M}) \\ X_0 > 0 \end{cases} \tag{3}$$

1.1 Si la suite (X_n) converge vers une limite l, à l'aide de la représentation graphique de la suite faite dans les préliminaires D, conjecturer une égalité satisfaite par l.

1.2 En utilisant les règles sur les limites de suites et en ayant soin de rappeler lesquelles sont utilisées, démontrer le résultat précédemment conjecturé.

1.3 Ce qui vient d'être fait permet-il d'en déduire que la suite converge ? Argumentez votre réponse.

Appeler l'enseignant pour faire contrôler vos résultats.

1.4 Justifier, en précisant le préliminaire utilisé, que la suite (X_n) est croissante (respectivement décroissante) si, pour tout entier n, X_n est dans l'intervalle $[0, M]$ (respectivement $[M, +\infty[$).

1.5 Déterminer les antécédents de M par f où f est la fonction définie en (2).

1.6 Montrer que

$$f\left([0,M]\cup[\frac{5}{2}M,\frac{7}{2}M]\right)\subset[0,M] \quad \text{et} \quad f([M,\frac{5}{2}M])\subset[M,\frac{5}{2}M]$$

1.7 Afin d'étudier le comportement de la suite (X_n) expliquer pourquoi on se limitera à X_0 élément de $]0,\frac{7}{2}M[$.

1.8 Démontrer par récurrence que si $X_0\in]0,M[$ alors la suite (X_n) est croissante.

1.9 Sans faire les démonstrations détaillées quel est le sens de variation de (X_n) lorsque

a. $X_0\in]M,\frac{5}{2}M[$?

b. $X_0\in]\frac{5}{2}M,\frac{7}{2}M[$?

c. $X_0=M$ ou $X_0=\frac{5}{2}M$?

1.10 Conclure concernant la convergence éventuelle de la suite en énonçant le théorème utilisé.

Que signifie ce résultat sur la population de poissons lorsqu'il n'y a pas de pêche ?

Appeler l'enseignant pour faire contrôler vos résultats.

Partie 2 Dans cette partie, nous étudions maintenant la suite (X_n) lorsque la pêche est constante et nous supposons que la biomasse de départ est la biomasse maximale, c'est-à-dire afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté

$$\begin{cases} X_{n+1}=X_n+0.4X_n(1-\frac{X_n}{M})-C \\ X_0=M \end{cases} \tag{4}$$

2.1 On suppose que la suite converge vers l, expliquer pourquoi l doit être solution de l'équation

$$x=x+0.4x(1-\frac{x}{M})-C. \tag{5}$$

2.2 Déterminer la plus grande valeur de C, notée C_m, pour que l'équation (5) admette au moins une solution réelle, puis déterminer pour $C=C_m$ la ou les solutions de (5).

Appeler l'enseignant pour faire contrôler vos résultats.

Dans la suite de cette partie $C=C_m$.

2.3 Montrer qu'alors $X_{n+1}-X_n=-0.4\frac{1}{M}(X_n-\frac{M}{2})^2$.

2.4 On note g la fonction définie par $g(x)=x+0.4x(1-\frac{x}{M})-0.1M$. Montrer que $g([\frac{M}{2},M])\subset[\frac{M}{2},M]$.

2.5 Conclure sur le comportement de la suite (X_n) (monotonie, convergence et limite éventuelles).

Que signifie ce résultat sur la population de poissons lorsque la pêche est maximale, c'est-à-dire $C=C_m$?

Appeler l'enseignant pour faire contrôler vos résultats.

Partie 3 *(Pour aller plus loin)* Nous allons à nouveau étudier la suite (3) en supposant qu'il n'y a pas de pêche ($C = 0$) mais en prenant un taux intrinsèque de croissance égal à 2 ($r = 2$) et $X_0 = \frac{3}{4}M$.

3.1 En faisant le changement de suite $v_n = \frac{X_n}{M}$ quelle est la valeur de v_0 et la relation de récurrence satisfaite par la suite (v_n) ?

3.2 Nous noterons encore f la fonction définie par $f(x) = x + 2x(1-x)$. Montrer que $f([\frac{3}{4}, 1]) \subset [1, \frac{9}{8}]$ et que $f([1, \frac{9}{8}]) \subset [\frac{3}{4}, 1]$.

3.3 Factoriser la fonction polynomiale $f \circ f(x) - x$ où $f \circ f(x)$ est la notation pour $f(f(x))$.

3.4 En vous inspirant de ce qui a été fait dans les préliminaires, visualiser graphiquement ce que semble être le comportement de la suite (v_n).

3.5 On va considérer les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) extraites de la suite (v_n). Donner une relation liant

- v_{2n}, v_{2n+2} et $f \circ f$
- v_{2n+1}, v_{2n+3} et $f \circ f$.

3.6 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{2n} \in [\frac{3}{4}, 1] \quad v_{2n+1} \in [1, \frac{9}{8}].$$

3.7 Montrer que la suite (v_{2n}) est croissante et majorée par 1 ; que la (v_{2n+1}) est décroissante et minorée par 1.

3.8 En déduire que ces deux suites convergent et déterminer leur limite.

3.9 Conclure quand à la convergence éventuelle de la suite (v_n).

Pour les curieux : la suite (1) *avec* $C = 0$ *est une suite logistique, son comportement dépend de* r *et devient chaotique lorsque* r *s'approche de 3.*

5.2 Annexe 2 : Problème 2

Partie I : La fonction argcosh - méthode analytique

I.1. Rappeler le schéma d'étude utilisé pour déterminer les applications réciproques des fonctions circulaires.

I.2. Rappeler le théorème de dérivation d'une application réciproque.

I.3. Quels sont les plus grands intervalles possibles I (au sens de l'inclusion) sur lesquels la restriction de la fonction cosh réalise une bijection de I sur $\cosh(I)$?

I.4. On restreint la fonction cosh à l'intervalle $[0, +\infty[$ et on note argcosh son application réciproque. Déterminer l'intervalle sur lequel argcosh est définie, l'intervalle sur lequel elle est dérivable puis calculer sa dérivée.

I. 5. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction argcosh.

Partie II : La fonction argcosh - méthode algébrique

II.1. Comment peut-on traduire en terme de résolution d'équation le fait qu'une fonction f réalise une bijection d'un ensemble I sur un ensemble J ?

II. 2. On restreint la fonction cosh à l'intervalle $[0, +\infty[$, quelle équation est-on amené à résoudre pour déterminer son application réciproque ?

II. 3. En faisant un changement d'inconnue, montrer que l'on se ramène à la résolution de l'équation

$$X^2 - 2yX + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad y \geq 1$$

II.4. Résoudre cette équation du second degré puis en déduire que $\text{argcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ pour tout $y \in [1, +\infty[$. On prendra bien soin de justifier toutes les étapes de cette résolution.

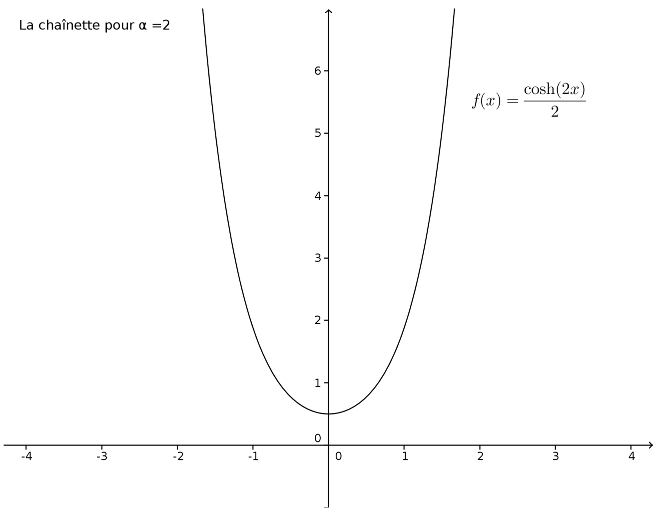
II.5. Retrouvez les résultats de la question I.4.

Partie III : La chainette

La forme prise par exemple par les fils de lignes électriques ou une corde entre deux poteaux s'appelle la chainette. On peut montrer et nous l'admettrons que la chainette a pour équation dans un repère orthonormé convenable

$$y = \frac{\cosh(\alpha x)}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha}$$

avec $\alpha > 0$.



III.1. Que représente l'axe des ordonnées de ce repère pour la chainette ?

On considère une corde de 4m dont les extrémités sont fixées à la même hauteur sur deux poteaux distants de 2m. Nous allons voir que nous sommes alors en mesure de déterminer la flèche de la chainette c'est à dire l'écart de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas.

On peut montrer et nous admettrons que si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ alors la longueur d'une courbe d'équation $y = f(x)$ entre les points d'abscisse a et b est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

III.2. On donne deux points $M(-1,3)$ et $N(1,7)$. Calculer la distance MN et retrouver cette valeur en utilisant la formule précédente.

III.3. Pour déterminer la flèche de la chainette, on choisit l'unité de notre repère de sorte que les poteaux aient pour abscisse -1 et 1. Quelle est alors la valeur de la flèche en fonction de α.

III.4. Montrer que connaissant la longueur de la corde, on peut en déduire avec ce qui précède que α est solution de l'équation $\sinh(x) = 2x$.

III.5. Montrer que cette équation admet une unique solution strictement positive.

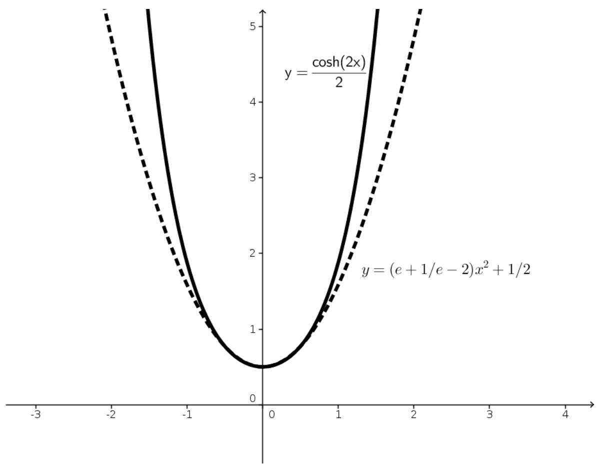
III.6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} puis une valeur approchée de la flèche.

Remarque : l'allure de la courbe représentative de $f \quad x \mapsto \frac{cosh(2x)}{2}$ (chainette pour $\alpha = 2$) peut laisser penser que l'on a une parabole. Ce n'est pas le cas, pour s'en convaincre supposons que c'est une parabole et cherchons des conditions nécessaires sur l'équation de cette parabole.

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie donc elle a pour équation $y = ax^2 + b$. $f(0) = b = \frac{1}{2}$ et pour trouver a on peut par exemple utiliser que $f(\frac{1}{2}) = \frac{e+e^{-1}}{4} = \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$ donc nécessairement $a = e + e^{-1} - 2$.

La seule parabole qui pourrait convenir a pour équation $y = (e + e^{-1} - 2)x^2 + \frac{1}{2}$. Si l'on regarde maintenant pour $x = 1$ on trouve

$$f(1) = \frac{e^2 + e^{-2}}{4} \neq (e + e^{-1} - 2) + \frac{1}{2}.$$



Pour des compléments sur la chaînette vous pouvez consulter :

http ://www.mathcurve.com/courbes2d/chainette/chainette.shtml