Dans la rubrique « outils » seront travaillés à partir d'exercices courts et ciblés des savoirs ou savoir-faire fondamentaux pour le thème de la fiche.

A la suite d'un « outil » sont proposés un ou plusieurs exercices de ré-investissement de cet outil. Ils sont en général classés de façon progressive, application de plus en plus élaborée et de moins en moins guidée.

On se limite cependant à des exercices qui doivent pouvoir être faits en autonomie et où toute virtuosité est exclue.

De nombreux « coups de pouce » sont prévus pour permettre ce travail en autonomie.

Il est fortement recommandé de traiter « l'outil » avant de chercher les exercices qui lui font suite.

Il est fortement déconseillé de se précipiter sur les corrigés, le travail de recherche, d'essais, même inaboutis, est indispensable pour progresser.

But de cette fiche : décomposer le travail que l'on est souvent amené à faire lors d'un calcul de limite.

Outil 1 : avoir une idée de la représentation graphique de fonctions de référence.

Suivi d'un exercice où il sera nécessaire de savoir comparer les ordres de grandeurs de différentes fonctions.

Outil 2 : lever une indétermination.

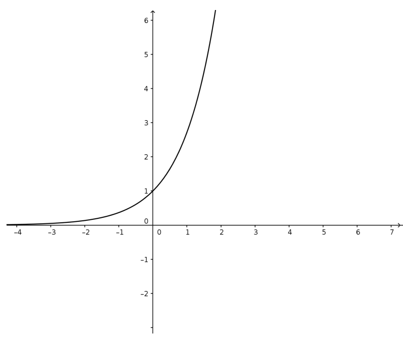
Suivi de trois exercices où il sera nécessaire de lever une indétermination pour des calculs de limite en $+\infty$ et 0.

Outil 1. Avoir une idée de la représentation graphique de fonctions de référence

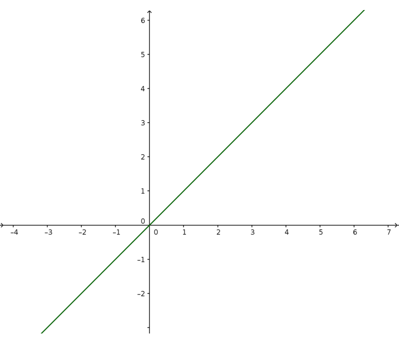
On considère sur leur domaine de définition les fonctions données par

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^{10}$, $f_5(x) = \frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{1}{x^3}$, $f_7(x) = \ln(x)$, $f_8(x) = e^x$, $f_9(x) = e^{-x}$.

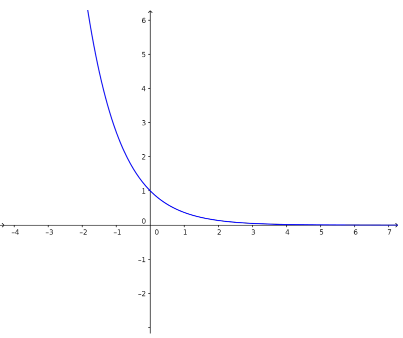
Identifier l'allure des courbes représentatives de ces fonctions parmi les graphes suivants (toutes les représentations graphiques sont à la même échelle)



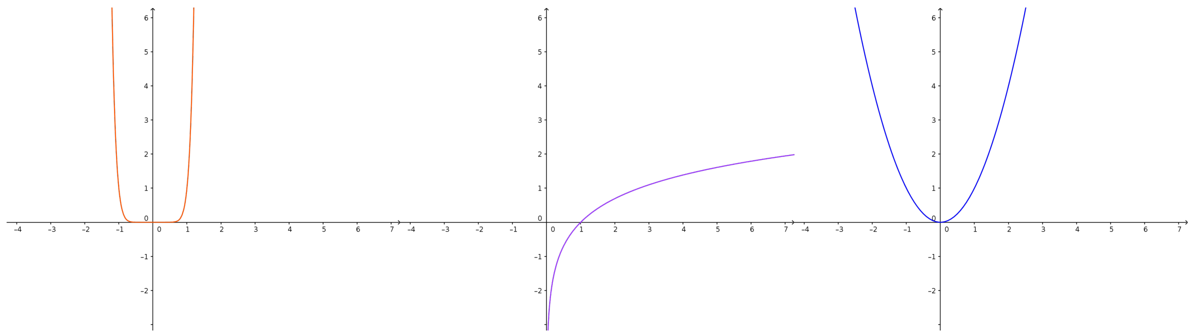
(a) 1



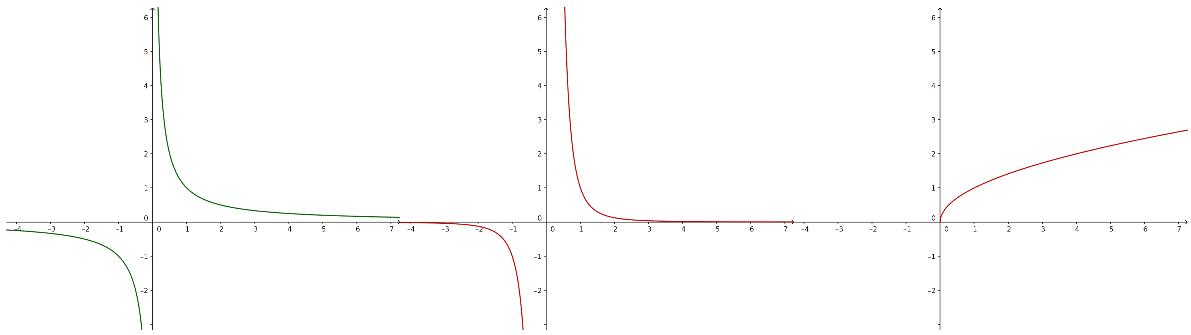
(b) 2



(c) 3



(a) 4 (b) 5 (c) 6



(a) 7 (b) 8 (c) 9

Coup de pouce

Maintenant que vous avez associé à chaque fonction sa courbe représentative, servez-vous en pour répondre aux questions qui vont suivre.

Exercice 1. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$?

Trouver lorsque c'est possible 2 fonctions f dans l'ensemble $\{f_i,\ -f_i,\ 1 \leq i \leq 9\}$ (c'est-à-dire que f peut être l'une des fonctions de Outil 1, ou son opposée), telles que

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + f(x) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + f(x) = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \times f(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{f(x)} = -\infty$

Coup de pouce

Que vaut $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^3}$?

Trouver lorsque c'est possible une fonction f dans l'ensemble $\{f_i,\ -f_i,\ 1 \leq i \leq 9\}$ (c'est-à-dire que f peut être l'une des fonctions ci-dessus ou son opposée), telles que

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^3} + f(x) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^3} + f(x) = -\infty$

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^3} \times f(x) = 0$

Coup de pouce

Outil 2. Lever une indétermination en $+\infty$

1. Pour justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^7 - 8x^3 + 5x^2) = +\infty$ on veut écrire cette expression comme le produit d'un terme qui tend vers $+\infty$ et d'un terme qui a une limite finie strictement positive. Pour cela, que vaut-il mieux mettre en facteur : x^7, x^3 ou x^2 ?
2. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = +\infty$;
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = 0$;
   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = l \neq 0$.

Coup de pouce pour la question 2

Outil 3. Lever une indétermination en 0

1. Pour justifier que $\lim\limits_{x \to 0} (x^7 - 8x^3 + 5x^2) = 0^+$ (0 par valeurs positives) on veut écrire cette expression comme le produit d'un terme qui tend vers 0^+ et d'un terme qui a une limite finie strictement positive. Pour cela que vaut-il mieux mettre en facteur x^7, x^3 ou x^2 ?
2. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que
   (a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = +\infty$;
   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = 0$;
   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = l \neq 0$.

Coup de pouce pour la question 2

Exercice 2. 1. Trouver tous les réels a, b et c (non tous les trois nuls) tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{ax^9 + bx^7 + cx^2} = 1$

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$.
3. Trouver tous les réels a, b et c tels que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{ax^3 + bx + c} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$$

Exercice 3. 1. Trouver tous les réels a, b et c (non tous les trois nuls) tels que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{ax^9 + bx^7 + cx^2} = 1$;

2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+7x^2+2x}{x^3-4x}$.
3. Trouver toutes les valeurs possibles des réels a, b, c pour que

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+7x^2+2x}{ax^3+bx+c} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3+7x^2+2x}{x^3-4x}$$

Coup de pouce pour l'exercice 3

Exercice 4. 1. Donner la limite en $+\infty$ de $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, $l(x) = \sqrt{x^2+x}$.

2. Lorsqu'on veut calculer la limite en $+\infty$ de la différence de deux fonctions prises parmi les précédentes on aboutit à chaque fois sur une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$. Comment lever l'indétermination pour $g(x) - f(x)$?
3. On remarque que pour $x > 0$, $h(x) = x\sqrt{1 + 1/x^2}$, $l(x) = x\sqrt{1 + 1/x}$.
   (a) Justifier ces deux égalités.
   (b) Montrer que cela permet de lever l'indétermination pour $g(x) - h(x)$ et $g(x) - l(x)$.
4. Comment calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - h(x)$, de $f(x) - l(x)$?

Coup de pouce pour la dernière question

Coups de pouce

Coup de pouce 1. Vous pouvez associer à chaque fonction sa représentation graphique en pensant

— au domaine de définition ;
— à ses variations ;
— à ses limites en $+\infty$ ou $-\infty$ ou 0 par valeur supérieure ou inférieure.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 2. : vous pouvez essayer de trouver en priorité des fonctions pour lesquelles vous n'aurez pas de forme indéterminée.

Si le cas précédent ne suffit pas servez-vous des représentations graphiques pour comparer si par exemple une fonction tend « plus vite » ou non qu'une autre vers l'infini ou 0.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 3. : utiliser la factorisation trouvée à la question 1.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 4. : utiliser la factorisation trouvée à la question 1.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 5. : lorsque x tend vers 0 ce sont maintenant les termes du type x^p avec $p \geq 1$ qui tendent vers 0.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 6. : pensez à l'expression conjuguée.

Retour à l'énoncé

Réponses

Correction Outil 1. Si on pense au domaine de définition :

— une seule fonction est définie sur $[0, +\infty[$: c'est la fonction f_2 et sa représentation graphique est la 9 ;

— une seule fonction est définie sur $]0, +\infty[$: c'est la fonction f_7 et sa représentation graphique est la 5 ;

— deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: ce sont les fonctions f_5 et f_6 et les représentations graphiques possibles sont les 7 et 8.
Leurs variations et limites en $+\infty$ (respectivement $-\infty$ ou 0 par valeur supérieure ou inférieure) sont les mêmes, on ne peut donc pas trancher avec cet argument.
On constate que la courbe représentative 8 « s'écrase » plus vite sur l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ que la courbe représentative 7. Or la fonction qui tend plus vite vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ est f_6. Si on veut le démontrer on utilise que pour tout $x > 0$

$$\frac{f_6(x)}{f_5(x)} = \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} \times \frac{x}{1} = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Il nous reste les fonctions f_1, f_3, f_4, f_8 et f_9 qui sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

Une seule de ces fonctions est une fonction affine, c'est f_1 et sa représentation graphique est la 2.

Si on pense aux variations :

— Dans les fonctions restantes, la seule qui est croissante sur $\mathbb{R}$ est f_8 et sa représentation graphique est la 1 (on pouvait aussi utiliser que c'est la seule fonction telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

— De façon analogue, dans les fonctions restantes, la seule qui est décroissante sur $\mathbb{R}$ est f_9 et sa représentation graphique est la 3 (on pouvait aussi utiliser que c'est la seule fonction telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).

Il ne nous reste plus que les fonctions f_3 et f_4 avec pour courbes représentatives possibles 4 et 6.

La courbe représentative de la fonction f_3 est une parabole ce qui correspond à la figure 6 (la courbe représentative 4 est trop « écrasée » en 0 pour être une parabole).

Correction Exercice 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

(a) Il suffit d'ajouter une fonction qui reste bornée lorsque x tend vers $+\infty$. En particulier une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ convient et on peut prendre : $\pm f_5$, $\pm f_6$ ou $\pm f_9$.

(b) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ il faut maintenant trouver une fonction de limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (condition nécessaire). Nous devons donc chercher parmi les fonctions $-f_i$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x) = +\infty$. Pour convenir, il faudra de plus qu'elle tende vers $+\infty$ « plus vite » que la fonction carré.

En observant les représentations graphiques on a l'impression que l'on peut prendre $-f_4$ et $-f_8$. Démontrons le :

$$x^2 - f_4(x) = x^2 - x^{10} = x^{10}(\frac{x^2}{x^{10}} - 1) = x^{10}(\frac{1}{x^8} - 1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{10} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x^8} - 1) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x^{10} = -\infty$

De même

$$x^2 - f_8(x) = x^2 - e^x = e^x(\frac{x^2}{e^x} - 1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (croissance comparée post-bac)

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{e^x} - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - f_8(x) = -\infty$.

(c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ il faut maintenant trouver une fonction de limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (condition nécessaire). Nous devons donc chercher parmi les fonctions $-f_i$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x) = 0$. Les fonctions f_5, f_6 et f_9 sont donc candidates (et leurs opposées).
Pour convenir, il faudra de plus qu'elle tende vers 0 « assez vite »(« plus vite » que la fonction $\frac{1}{x^2}$).

En observant les représentations graphiques on a l'impression que f_5 tend vers 0 moins vite que f_6 qui tend vers 0 moins vite que f_9. Regardons plus en détail :

$x^2 \times f_5(x) = x^2 \times \frac{1}{x} = x$ donc $\lim_{+\infty} x^2 \times f_5(x) = +\infty$: donc f_5 ne convient pas.
$x^2 \times f_6(x) = x^2 \times \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{+\infty} x^2 \times f_6(x) = 0$: donc f_6 convient (ainsi que son opposée $-f_6$).
Enfin :
$x^2 \times f_9(x) = x^2 \times e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$ donc $\lim_{+\infty} x^2 \times f_9(x) = 0$ (croissance comparée post-bac) : donc f_9 convient (ainsi que son opposée $-f_9$).

(d) Il suffit de trouver des fonctions telles que $\frac{1}{f(x)}$ tende vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire il suffit de trouver des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$ (tende vers 0 en restant négative). Les fonctions $-f_5$, $-f_6$ ou $-f_9$ conviennent.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^3} = +\infty$.

On reprend les mêmes arguments que pour la fonction carré en étant vigilant sur le fait que cette fois x tend vers 0 par valeurs supérieures.

(a) Il suffit de trouver une fonction qui reste bornée lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, les fonctions $\pm f_1$, $\pm f_2$, $\pm f_3$, $\pm f_4$, $\pm f_8$ ou $\pm f_9$ conviennent.

(b) Il faut maintenant trouver une fonction de limite $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (condition nécessaire). Nous devons donc chercher parmi les fonctions f_i avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_i(x) = -\infty$ ou parmi les fonctions $-f_i$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_i(x) = +\infty$.

Les fonctions candidates sont f_7, $-f_5$ et $-f_6$ mais aucune d'entre elles ne convient. En effet :

$$\frac{1}{x^3} + f_7(x) = \frac{1}{x^3} + \ln(x) = \frac{1}{x^3}(1 + x^3\ln(x))$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^3\ln(x) = 0$ (croissance comparée post-bac) donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^3} + f_7(x) = +\infty$. Donc f_7 ne convient pas.

$$\frac{1}{x^3} - f_5(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}(1 - \frac{x^3}{x}) = \frac{1}{x^3}(1 - x^2)$$

or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1 - x^2) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^3} - f_5(x) = +\infty$. Donc $-f_5$ ne convient pas.

Enfin, on a évidemment $\frac{1}{x^3} - f_6(x) = 0$ donc f_6 ne convient pas non plus.

(c) Il faut maintenant trouver une fonction de limite 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (condition nécessaire). Pour convenir, il faudra de plus qu'elle tende vers 0 « plus vite » que x^3.

En observant les représentations graphiques on a l'impression que l'on peut prendre $\pm f_4$. En effet

$$\frac{1}{x^3} \times f_4(x) = \frac{x^{10}}{x^3} = x^7 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x^7 = 0.$$

Correction Outil 2. 1. Tous les termes du type $\frac{1}{x^p}$ avec $p \geq 1$ ont une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$. On a donc intérêt à mettre la plus grande puissance de x en facteur.

$x^7 - 8x^3 + 5x^2 = x^7(1 - \frac{8}{x^4} + \frac{5}{x^5})$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^5}) = 1$, la limite est finie et strictement positive.

2. Avec la factorisation précédente

$$\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = \frac{x^7(1 - \frac{8}{x^4} + \frac{5}{x^5})}{x^n} = x^{7-n}(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^5})$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^5}) = 1$, la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n}$ est celle de x^{7-n}. Ainsi

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{7-n} = +\infty$ si et seulement si $7 - n > 0$, les entiers n solutions sont les $n < 7$; l'ensemble des entiers solutions est donc $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{7-n} = 0$ si et seulement si $7 - n < 0$, les entiers n solutions sont les $n > 7$; l'ensemble des entiers solutions est $\{8, 9, 10, \ldots\}$.

(c) $x^0 = 1$, il y a donc un seul entier n solution qui est $n = 7$.

Correction Outil 3. 1. Tous les termes du type x^p avec $p \geq 1$ ont une limite nulle lorsque x tend vers 0. On a donc intérêt ici à mettre la plus petite puissance de x en facteur.

$x^7 - 8x^3 + 5x^2 = x^2(x^5 - 8x + 5)$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$ (tend vers 0 par valeurs positives).
$\lim\limits_{x \to 0} (x^5 - 8x + 5) = 5$, la limite est finie et strictement positive.

2. Avec la factorisation précédente

$$\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{x^n} = \frac{x^2(x^5 - 8x + 5)}{x^n} = x^{2-n}(x^5 - 8x + 5)$$

Puisque $\lim_{x\to 0}(x^5 - 8x + 5) = 5$, la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{x^7-8x^3+5x^2}{x^n}$ est celle de $5x^{2-n}$. Ainsi

(a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 5x^{2-n} = +\infty$ si et seulement si $2-n < 0$, les entiers n solutions sont les $2 < n$; l'ensemble des entiers solutions est $\{3, 4, 5, \ldots\}$.

(b) $\lim_{x\to 0} 5x^{2-n} = 0$ si et seulement si $2 - n > 0$, les entiers n solutions sont les $2 > n$, donc seuls $n = 0$ et $n = 1$ sont solutions ;

(c) $x^0 = 1$, donc il y a un unique entier n solution qui est $n = 2$, et on a alors $l = 5$.

Correction Exercice 2. 1. Comme vu pour le numérateur on cherche à factoriser le dénominateur sous la forme du produit d'une puissance de x et d'un terme qui tend vers une limite finie non nulle.

Nous sommes pour cela amené à distinguer trois cas.

Cas 1 : si $a \neq 0$**.** Alors $ax^9+bx^7+cx^2 = x^9(a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^7})$ avec $\lim_{x\to+\infty}(a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^7}) = a \neq 0$. D'où

$$\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{ax^9 + bx^7 + cx^2} = \frac{x^7}{x^9}\frac{1 - \frac{8}{x^4} + \frac{5}{x^5}}{a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^7}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{ax^9 + bx^7 + cx^2} = 0$$

Donc cela ne convient pas : pour avoir la limite demandée, il est nécessaire de prendre $a = 0$.

Cas 2 : si $a = 0$ **et** $b \neq 0$**.** Alors $bx^7 + cx^2 = x^7(b + \frac{c}{x^5})$ et

$$\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{bx^7 + cx^2} = \frac{x^7}{x^7}\frac{1 - \frac{8}{x^4} + \frac{5}{x^5}}{b + \frac{c}{x^5}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^7 - 8x^3 + 5x^2}{bx^7 + cx^2} = \frac{1}{b}$$

On a donc la limite demandée pour $a = 0$ et $b = 1$ quelle que soit la valeur de c.

Cas 3 : si $a = b = 0$ **et** $c \neq 0$**.** Alors on se retrouve dans le cas (a) de l'outil 2 et la limite est infinie ($+\infty$ si $c > 0$ et $-\infty$ si $c < 0$).

Conclusion : sont solutions les réels a, b et c tels que $a = 0$, $b = 1$ et c réel arbitraire.

2. En mettant en facteur le terme de degré le plus élevé on trouve :

$$\frac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x} = \frac{x^3}{x^3} \times \frac{(3 + \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2})}{(1 - \frac{4}{x^2})}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+7x^2+2x}{x^3-4x} = 3$

3. Evidemment $a = 1$, $b = -4$ et $c = 0$ conviennent. Mais ce n'est pas la seule possibilité : en procédant de même qu'à la première question on trouve que sont solutions tous les réels a, b et c tels que $a = 1$, b et c réels arbitraires.

Correction Exercice 3. 1. Comme vu pour le numérateur on cherche à factoriser le dénominateur sous la forme du produit d'une puissance de x et d'un terme qui tend vers une limite finie non nulle.

Nous sommes pour cela amené à distinguer deux cas.

Cas 1 : si $c \neq 0$**.** Alors $ax^9+bx^7+cx^2 = x^2(ax^7+bx^5+c)$ et $\lim\limits_{x\to 0}(ax^7+bx^5+c) = c \neq 0$. D'où
$$\frac{x^7-8x^3+5x^2}{ax^9+bx^7+cx^2} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{x^5-8x+5}{ax^7+bx^5+c} \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{x^5-8x+5}{ax^7+bx^5+c} = \frac{5}{c}$$
Pour avoir la limite demandée, il est nécessaire et suffisant de prendre $c=5$; a et b sont arbitraires.
Cas 2 : si $c = 0$**.** Alors $ax^9+bx^7+cx^2 = x^2(ax^7+bx^5)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}(ax^7+bx^5) = 0$. D'où
$$\frac{x^7-8x^3+5x^2}{ax^9+bx^7} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{x^5-8x+5}{ax^7+bx^5} \text{ et } \lim_{x\to 0} \left|\frac{x^5-8x+5}{ax^7+bx^5}\right| = +\infty$$
quelles que soient les valeurs de a et b.

Conclusion : sont solutions les réels a, b et c tels que $c=5$ et a et b sont des arbitraires.

2. $$\frac{3x^3+7x^2+2x}{x^3-4x} = \frac{x(3x^2+7x+2)}{x(x^2-4)} = \frac{3x^2+7x+2}{x^2-4}$$
et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+7x+2}{x^2-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

3. On distingue à nouveau différents cas en commençant par mettre en facteur la plus petite puissance de x au dénominateur.
Cas 1 : si $c \neq 0$**.** Alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3+7x^2+2x}{ax^3+bx+c} = 0$, ce cas ne convient pas.
Cas 2 : si $c=0$ **et** $b \neq 0$**.** Alors
$$\frac{3x^3+7x^2+2x}{ax^3+bx} = \frac{3x^2+7x+2}{ax^2+b} \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+7x+2}{ax^2+b} = \frac{2}{b}$$
On a donc le résultat souhaité pour $c=0$ et $b=-4$ quelle que soit la valeur de a.
Cas 3 : si $c=b=0$ **et** $a \neq 0$**.** Alors
$$\frac{3x^3+7x^2+2x}{ax^3} = \frac{1}{x^2}\frac{3x^2+7x+2}{a}$$
et la limite vaut $+\infty$ si $a>0$ et $-\infty$ si $a<0$.
Conclusion : sont solutions les réels a, b et c tels que a réel arbitraire, $b=-4$ et $c=0$.

Correction Exercice 4. 1. Toutes ces fonctions ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On est en $+\infty$, on met donc en facteur le terme de plus haut degré :
$g(x)-f(x) = x^2(1-\frac{1}{x})$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-f(x) = +\infty$.

3. (a) $h(x) = \sqrt{x^2(1+1/x^2)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2} = x\sqrt{1+1/x^2}$ car x est strictement positif. De même $l(x) = \sqrt{x^2(1+1/x)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x} = x\sqrt{1+1/x}$ car x est strictement positif.
   (b) L'expression précédente pour $h(x)$ et le fait que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+1/x^2} = 1$ suggère que le terme de plus haut degré à mettre x^2 en facteur est encore x^2 :
   Pour $x>0$, $g(x)-h(x) = x^2\left(1-\frac{1}{x}\sqrt{1+1/x^2}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-h(x) = +\infty$.
   De même pour $x>0$, $g(x)-l(x) = x^2\left(1-\frac{1}{x}\sqrt{1+1/x}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-l(x) = +\infty$.
   (remarque : on pouvait aussi remarquer que pour $x>0$ $g(x)-l(x) \geq g(x)-h(x)$ et conclure en utilisant le théorème de comparaison).

4. Ici le terme de plus haut degré pour f et pour h serait x, mais le mettre en facteur aboutit à nouveau à une indétermination de forme $+\infty \times 0$ (le fait que h ne soit pas un polynôme complique les choses). Pour résoudre cela on peut multiplier par l'expression conjuguée :

$$f(x) - h(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = 0$.

De même

$$f(x) - l(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2+x})(x + \sqrt{x^2+x})}{x + \sqrt{x^2+x}} = \frac{x^2 - (x^2+x)}{x + \sqrt{x^2+x}} = -\frac{x}{x + \sqrt{x^2+x}} = -\frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/x}}$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - l(x) = \frac{1}{2}$.