Inégalités-inéquations en seconde

Nous proposons ici une progression pour travailler les opérations sur les inégalités et les inéquations. Contrairement à ce qui est préconisé dans les nouveaux programmes de seconde nous ne travaillons pas le produit d'une inégalité par un réel en lien avec les variations d'une fonction affine. En effet, il est important de mettre en place assez vite dans l'année la résolution des inéquations du 1er degré qui sont notamment indispensables à l'étude du signe d'un produit et d'un quotient. Or la définition théorique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction sur un intervalle est difficile et de ce fait ne peut être qu'un attendu de fin de seconde.

1) Inégalités strictes et larges : pourquoi plusieurs symboles ?

Si les symboles « < » et « > » sont connus depuis le cycle 2, il n'en est pas de même pour les symboles «⩾» et «⩽» qui ne sont mentionnés à aucun moment dans les programmes des cycles 2, 3 et 4. Il est donc très fréquent de trouver des élèves de seconde qui ne les ont jamais rencontrés. Ce premier exercice permet de travailler et d'introduire ces symboles.

Exercice : Dans un parc de loisirs, certaines attractions sont réservées à des enfants d'une taille bien précise.

On appelle T la taille d'un enfant en mètres.

Attraction 1	Attraction 2	Attraction 3	Attraction 4	Attraction 5
Réservée aux enfants mesurant entre 1,40m et 1,60m.	**Réservée aux enfants mesurant strictement moins de 1,40m.**	**Réservée aux enfants mesurant 1,40m et moins .**	**Réservée aux enfants mesurant 1,40m et plus .**	**Interdite aux enfants mesurant 1,40m ou moins.**

a) Écris pour chaque attraction une inégalité traduisant le fait que l'enfant est autorisé à participer.
b) Lionel mesure 1,45 m, quelle attraction a-t-il le droit de faire ?
Sarah mesure 1,34 m, quelle attraction a-t-elle le droit de faire ?
Moussa mesure 1,40 m, quelle attraction a-t-il le droit de faire ?

Au moment de la correction, dès la première attraction, la discussion s'engage. On trouve dans la classe différents types de réponses qui permettent de clarifier ce qu'attend le professeur, comme par exemple :

$1,40<T<1,60$

$1,40\leqslant T\leqslant 1,60$

$1,40<T>1,60$ ...

Il est souvent nécessaire de rappeler la signification des symboles « > » et « < » pour éviter le type d'erreur de la ligne 3.
Ensuite le professeur doit expliciter la notion d'inégalité stricte et large : quand on dit que l'attraction est réservée aux enfants mesurant entre 1,40m et 1,60m, cela signifie, entre autre, qu'un enfant de 1,40m et un enfant de 1,60 m ont le droit d'y entrer.

Les expressions « strictement inférieur » et « strictement supérieur » doivent être clairement expliquées pour éviter toute ambiguïté.
Le professeur peut en profiter pour travailler aussi les expressions « positif », « strictement positif » etc. que l'élève doit savoir traduire par des inégalités.
Cette clarification ne lève cependant pas toutes les ambiguïtés, en langage courant lorsqu'on dit «entre 14 et 18 ans », on va admettre les personnes âgées de 14 ans mais pas celle de 18.
Il faudra veiller à ce que la consigne des exercices soit explicite avec des formules du type : « entre 14 et 18 ans compris » par exemple.

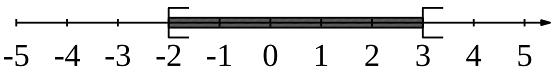
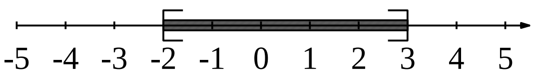
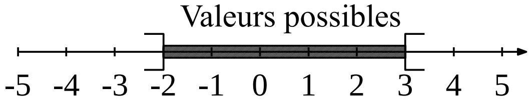
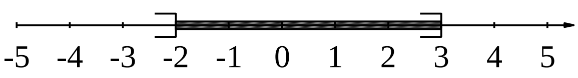
Bilan :
« < » signifie « strictement plus petit que » ou « strictement inférieur à »
« > » signifie « strictement plus grand que » ou « strictement supérieur à »
« $\leqslant$ » signifie « plus petit ou égal à » ou « inférieur à »
« $\geqslant$ » signifie « plus grand ou égal à » ou « supérieur à »

application : vrai ou faux ?
$4{,}72<4{,}625$
$4\leqslant 5$
$10{,}02>10{,}1$
$5\geqslant 3$ etc .
C'est l'occasion de travailler la logique.
« $4\leqslant 5$ » signifie (4<5) OU (4=5) , si « $4<5$ » alors « $4\leqslant 5$ »

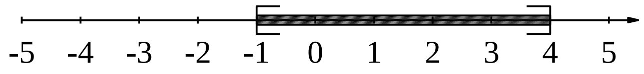
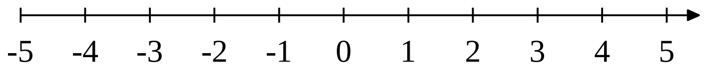
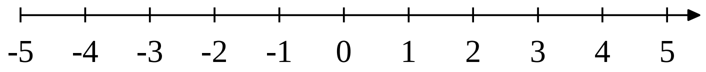
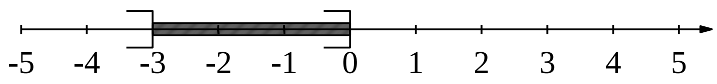
2) Inégalités , graphique et intervalle :

a. introduire les crochets :

Exercice n°1 : Associer un graphique à chaque encadrement

Valeurs possibles  pour x .		$-2<x<3$
Valeurs possibles  pour x .		$-2<x\leqslant 3$
Valeurs possibles  pour x .		$-2\leqslant x<3$
Valeurs possibles  pour x .		$-2\leqslant x\leqslant 3$

Exercice n°2 : Compléter le tableau

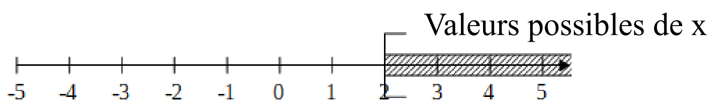
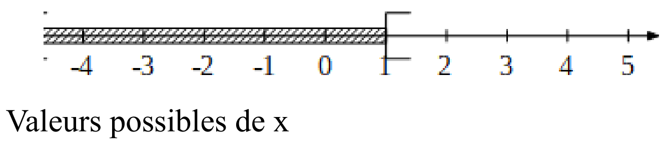
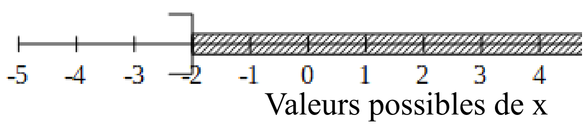
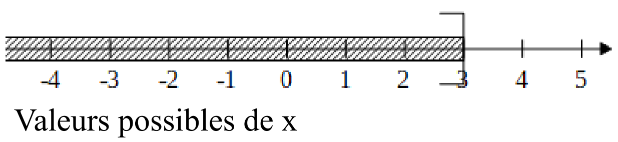
Droite graduée	Encadrement
	
	$-4<x<1$
	$-2\leqslant x<5$
	

b. intervalles bornés

On reprend les 8 encadrements précédents pour introduire la notion d'intervalle.

c. intervalles non bornés

Exercice n°3: Compléter le tableau

Droites graduées	Inégalités
	
	
	
	

On reprend ensuite les quatre inégalités précédentes pour introduire la notion d'intervalles non bornés.

<u>Exercice n°4:</u> Compléter le tableau par les expressions ou représentations attendues :

Représentation	Intervalle	Inégalité
		$x > 3$
	$x \in [-2;4]$	
	$x \in]-\infty;5]$	
		$0 \leqslant x < 3$

<u>Bilan sur les intervalles qui fait le lien avec la notion d'ensemble :</u>

[a;b]={ $x \in \mathbb{R}$, tels que $a \leqslant x \leqslant b$ }.

3) Opération sur les inégalités :

a. addition :

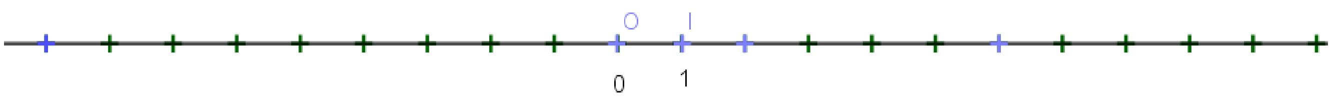
expérimentation mathématique :

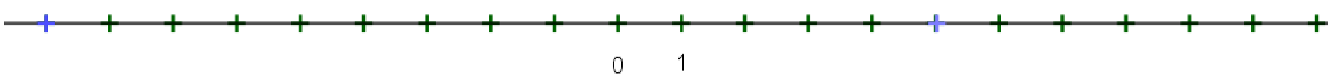
1. compléter le tableau suivant :

a	b	Comparaison de a et de b	c	$a+c$	$b+c$	Comparaison de $a+c$ et de $b+c$
2	5		0,5			
-2	-5		3			
-3	7		7			
8	1		10			
3	-6		4			
2	5		-0,5			
-2	-5		-3			
-3	7		-7			
8	1		-10			
3	-6		-4			

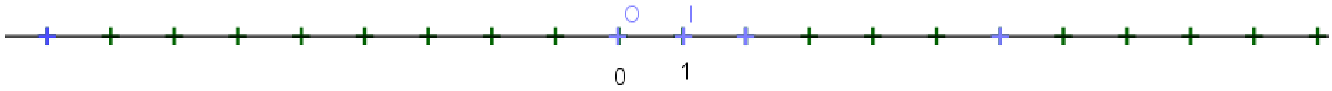
On conjecture que si $a<b$ alors $a+c<b+c$ pour tout réel c .

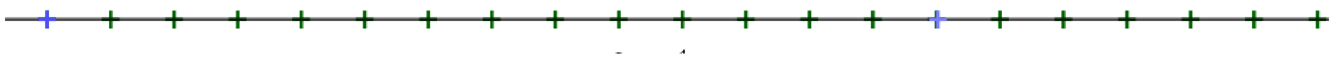
2. a. Sur la première droite graduée ci-dessous, place les points A, M et N d'abscisses respectives 2, -2 et -5 , puis sur la deuxième droite graduée les points A', M' et N' d'abscisses respectives 2+3, $-2+3$ et $-5+3$.



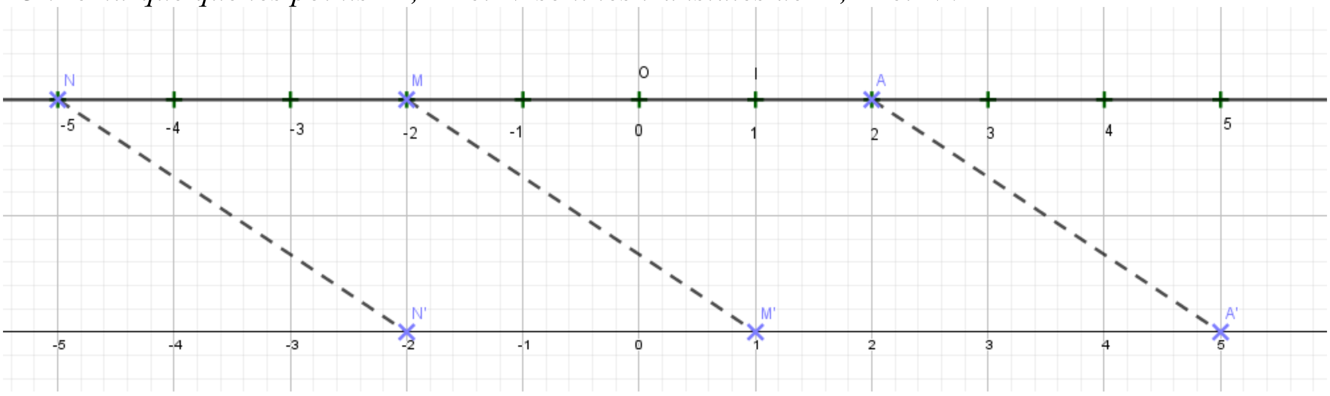


b. Sur la première droite graduée ci-dessous, place les points B, E et D d'abscisses respectives 2, -2 et -1, puis sur la deuxième les points B’, E’ et D’ d'abscisses respectives $2-3$, $-2-3$ et $-1-3$.



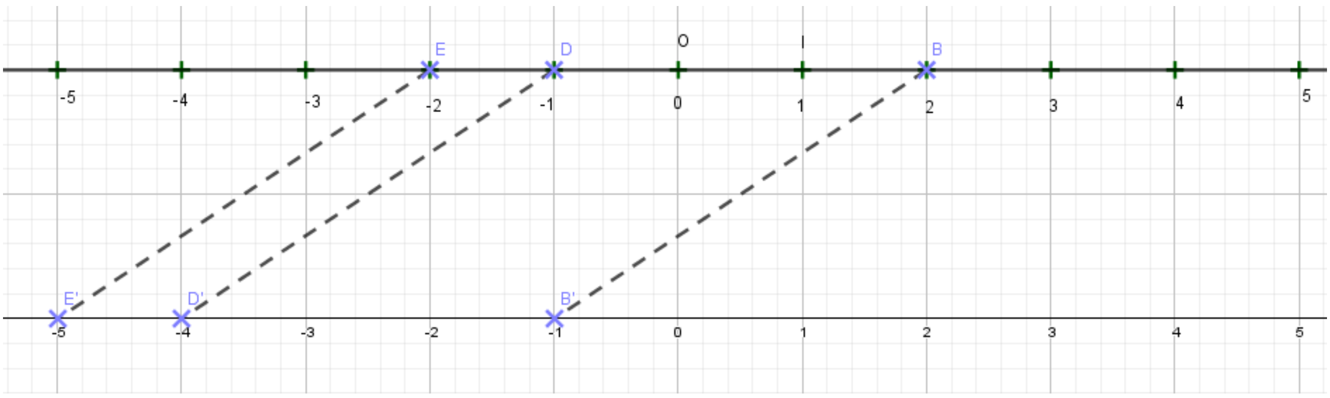


On remarque que les points A’, M’ et N’ sont les translatés de A , M et N .



Si on souhaite travailler sur une seule droite, la translation est celle de vecteur $3\overrightarrow{OI}$.

De même,B’, E’ et D’ sont les images de B, E et D dans une translation.



A, M et N sont donc rangés dans le même ordre que A’, M’et N’. De même pour B, E, D et B’,E’et D’.

La preuve est plutôt simple mais permet de mettre en place une méthode pour comparer deux nombres : celle d’étudier le signe de leur différence.

a , b et c sont trois réels tels que $a<b$, on veut comparer $a+c$ et $b+c$, on calcule $(a+c)-(b+c)=a-b<0$ donc $a+c<b+c$.

La mise en œuvre de cette méthode nécessite un travail en amont qui peut être fait à l’oral . Le professeur demande :

- *soit a et b deux nombres tels que la différence $a-b$ est un nombre positif , que peut-on en déduire ?*
- *Soit a et b deux nombres tels que $a<b$, que peut-on dire de la différence $a-b$?*

On peut faire des exercices du type : sans calculatrice, comparer $\pi^2+2\pi+5$ *et* $\pi^2+3\pi+2$.

Bilan : Si on ajoute (ou on soustrait) un même nombre aux deux membres d'une inégalité on ne change pas le sens de l'inégalité.

b. multiplication

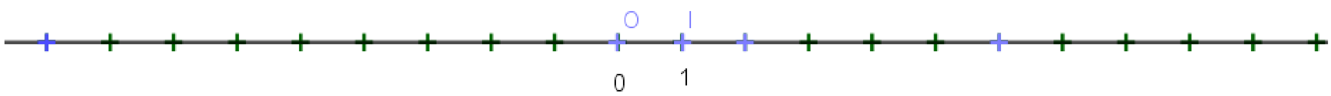
1. Expérimentation : compléter le tableau suivant :

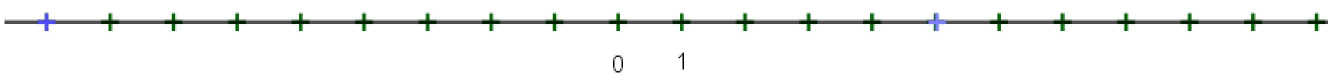
a	b	Comparaison de a et de b	c	ac	bc	Comparaison de ac et de bc
2	5		0,1			
-2	-5		2			
-3	7		7			
8	1		10			
3	-6		4			
2	5		-0,1			
-2	-5		-2			
-3	7		-7			
8	1		-10			
3	-6		-4			

On conjecture que si $a<b$ *alors* $a\times c<b\times c$ *pour tout réel c strictement positif et que si* $a<b$ *alors* $a\times c>b\times c$ *pour tout réel c strictement négatif.*

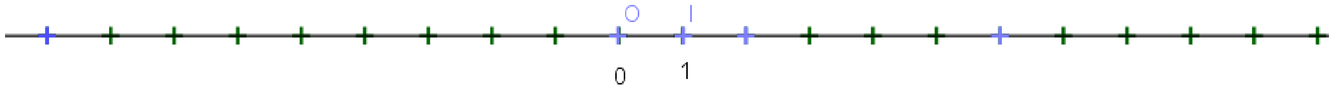
2. droites graduées

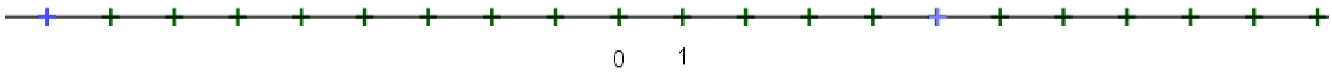
a. Sur la première droite graduée ci-dessous, place les points A, B et C d'abscisses respectives -1, 2 et 5, puis sur la deuxième les points A’, B’ et C’ d'abscisses respectives -1×2 , 2×2 et 5×2 .



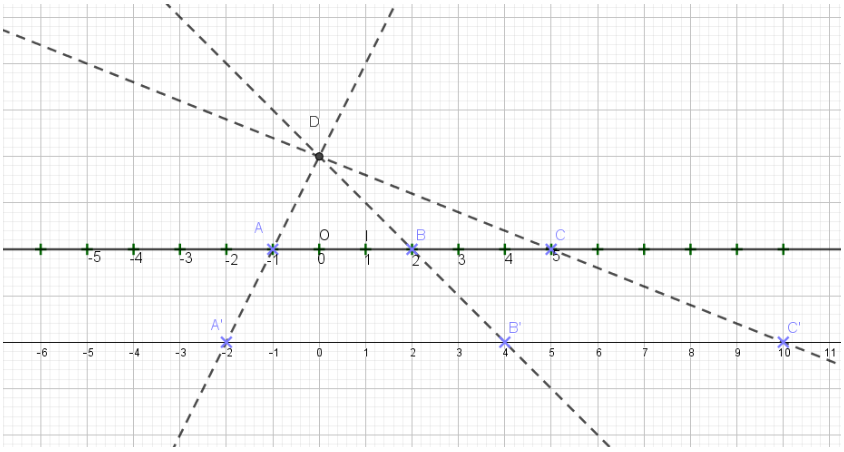


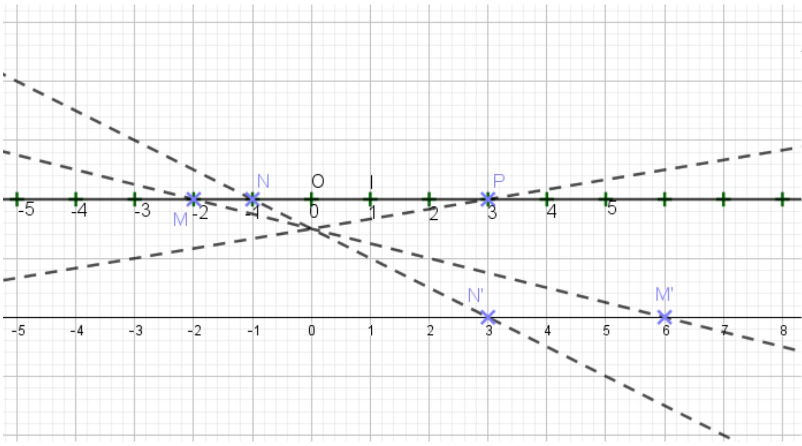
b. Sur la première droite graduée ci-dessous, place les points M, N et P d'abscisses respectives -2 , -1 et 3, puis sur la deuxième les points M', N' et P' d'abscisses respectives $-3\times(-2)$, $-3\times(-1)$ et -3×3 .





Dans le 1[er] cas, A', B' et C' sont respectivement les images de A, B et C par une homothétie de centre D et de rapport positif donc A', B' et C' sont dans le même ordre que A, B et C.





Dans l'autre cas, on a une homothétie de rapport négatif, les ordres sont inversés.

La preuve de la conjecture donne l'occasion de retravailler la méthode vue lors de propriété précédente et d'amorcer le raisonnement par disjonction des cas.

Soit a *et* b *deux nombres tels* $a<b$.

Si c est un réel strictement négatif, $a\times c-b\times c=c(a-b)$ *, or* $c<0$ *et* $a-b<0$ *car* $a<b$ *donc* $a\times c-b\times c>0$ *soit* $a\times c>b\times c$.

Si c est un réel strictement positif, $c<0$ *et* $a-b<0$ *car* $a<b$ *donc* $a\times c-b\times c<0$ *soit* $a\times c<b\times c$.

La conjecture est donc prouvée.

Bilan : Si on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, on change le sens de l'inégalité.

Si on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.

<u>4) Des problèmes pour introduire et travailler la résolution d'inéquations :</u>

a. programmes de calcul

Magali a écrit le programme de calcul suivant.

- ☞ Choisis un nombre.
- ☞ Soustrais 6.
- ☞ Multiplie le résultat par 4.
- ☞ Écris le résultat.

Ziad a, lui, écrit ce programme de calcul :

- ☞ Choisis un nombre.
- ☞ Prends son double.
- ☞ Soustrais 10.
- ☞ Écris le résultat.

1. Applique ces deux programmes de calcul aux nombres − 3 ; 0 et 20. Dans quel(s) cas, le programme de Magali donne-t-il un résultat inférieur à celui de Ziad ?
2. Quels nombres peut choisir Magali pour que son programme donne à chaque fois un résultat supérieur à celui de Ziad ?

Le professeur, en faisant le bilan des méthodes employées dans la classe, explique le principe de la résolution des inéquations.

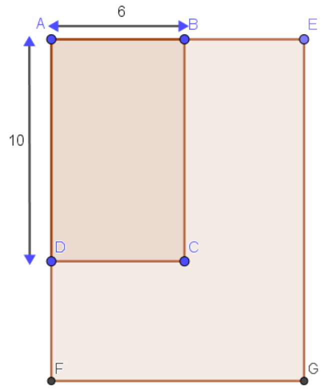
b. tarif

Une agence de location de véhicules propose les deux tarifs suivants :
1er tarif : forfait 80 € plus 0,10 € par kilomètre parcouru.
2e tarif : 0,18 € par kilomètre parcouru.
Déterminer les distances en kilomètres pour lesquelles le 1er tarif est le plus avantageux pour le client.

On pose x *la distance en km, on obtient* $80+0{,}10\,x<0{,}18\,x$.
Certains élèves écrivent $80<0{,}08\,x$ *et de manière instinctive évite la multiplication par un nombre négatif.*

c. périmètres

Exemple 1: On considère le rectangle ABCD ci-contre. On augmente ses dimensions telles que BE=DF pour obtenir un rectangle AEGF. Déterminer la valeur de BE pour que la mesure du périmètre de AEGF soit supérieure ou égale à 95 .



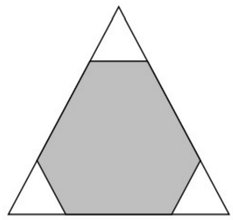
Certains élèves procèdent par essai uniquement sur les nombre entiers et trouvent qu'à partir de 16 , le périmètre de AEGF soit supérieure à 95.

D'autres travaillent sur les écarts et disent $2\times\mathrm{BE}\geqslant 47{,}5-16$ *soit* $\mathrm{BE}\geqslant 15{,}75$.

et enfin certains mettent en inéquation le problème en posant x=BE et écrivent $(6+x+10+x)\times 2\geqslant 95$.

Exemple 2:

Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de côté 6 cm. Pour quelles mesures du côté des petits triangles le périmètre de l'hexagone gris est-il supérieur ou égal à la somme des périmètres des trois petits triangles ? (d'après brevet des collèges)



Soit x *le côté des petits triangles; le périmètre d'un petit triangle vaut* $3x$ *, celui de l'hexagone gris vaut* $3(6-2x)+3x=18-3x$

il s'agit donc de résoudre $18-3x\geq 9x$ *soit* $-12x\geqslant -18$ *soit* $x\leqslant\frac{18}{12}$

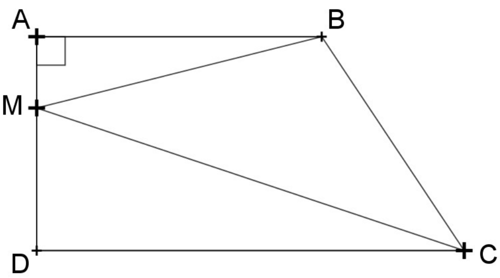
or x *est un nombre positif car c'est une longueur donc* $x\in\left[0\,;\frac{3}{2}\right]$.

d. aires

On considère le trapèze ABCD ci-contre tel que :
(AB) ⊥ (AD) ; AB = 4 ; AD = 3 et DC = 6.

M est un point mobile sur le segment [AD].

Où placer le point M sur [AD] pour que l'aire du triangle ABM soit supérieure ou égale à celle du triangle MDC ?



Cet exercice peut être utilisé pour une première prise en main de GeoGebra. La conjecture est cependant inexacte puisque AM est dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{4}{3}\right]$.

e. algorithmique

Mélanie a écrit le programme suivant.

```
def f(X):
    Y=X+1
    Y=7*Y
    return Y
```

Yanis a, lui, écrit ce programme de calcul :

```
def g(X):
    Y=X*4
    Y=Y-3
    return Y
```

1. Applique ces deux programmes de calcul aux nombres -5 ; $\frac{2}{3}$ et 5. Dans quel(s) cas, le programme de Mélanie donne-t-il un résultat inférieur à celui de Yanis ?
2. Quels nombres peut choisir Mélanie pour que son programme donne à chaque fois un résultat supérieur à celui de Yanis ?

f. **des doubles inégalités : une amorce de l'intersection**

résoudre $-x+7<3x-1<2x+9$

on obtient $-x+8<3x<2x+10$ *et donc les élèves sont amenés à traduire cette encadrement par un système d'inégalités :* $3x>-x+8$ *et* $3x<2x+10$ *soit* $x>2$ *et* $x<10$ *donc* $x\in]2;10[$

résoudre $2x+1<3x+2<x-4$

on obtient $2x-1<3x<x-6$ *soit* $3x>2x-1$ *et* $3x<x-4$ *donc* $x>-1$ *et* $x<-1$ *, cette double inéquation n'a pas de solution.*