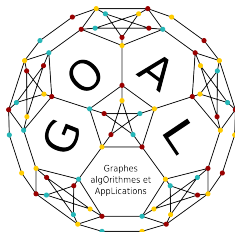


Jeux combinatoires: du labo à la classe

Eric Duchêne
En collaboration avec Aline Parreau

Laboratoire LIRIS, Université Lyon 1

Séminaire de l'IREM Aquitaine, 7 novembre 2018



Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle, toujours un gagnant



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle, toujours un gagnant



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle, toujours un gagnant
- Vainqueur uniquement déterminé par le dernier coup (pas de score). **Convention normale** : celui qui joue le dernier coup gagne.



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion



Petits chevaux



Go

Jeux combinatoires : définition

Définition stricte [Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981]

- 2 joueurs exactement
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle, toujours un gagnant
- Vainqueur uniquement déterminé par le dernier coup (pas de score). **Convention normale** : celui qui joue le dernier coup gagne.



Echecs



Tarot



Othello



Dames



Morpion

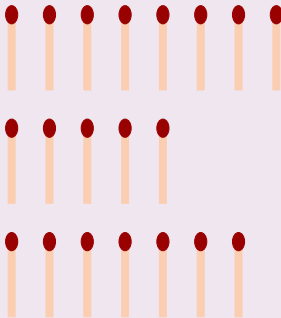


Petits chevaux



Go

Jeux de NIM



A tour de rôle, 2 joueurs retirent des allumettes dans une seule ligne. Celui qui prend la dernière allumette gagne.

Un exemple : DOMINEERING

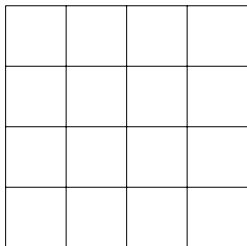
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



Un exemple : DOMINEERING

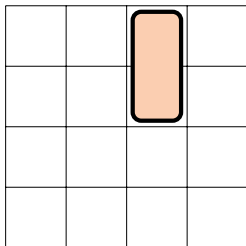
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



Un exemple : DOMINEERING

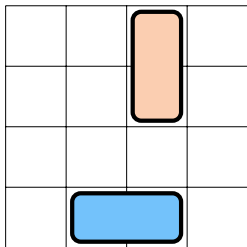
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



Un exemple : DOMINEERING

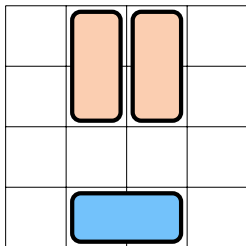
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



Un exemple : DOMINEERING

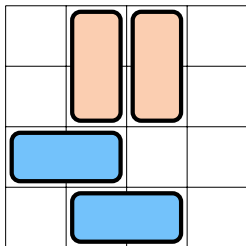
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



Un exemple : DOMINEERING

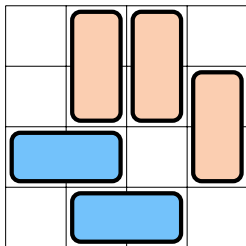
DOMINEERING

Une grille $n \times m$. A tour de rôle, aLine et eRic posent un domino sur la grille.

aLine : verticalement.

eRic : horizontalement.

Le premier joueur bloqué perd.



aLine gagne!

Issue du jeu. Qui gagne ?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Issue du jeu. Qui gagne ?

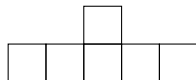
Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence ?

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

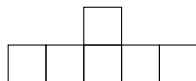
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

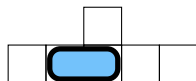
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

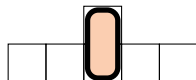
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

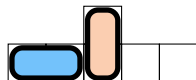
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

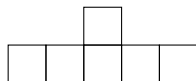
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



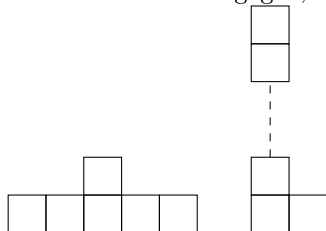
\mathcal{R}

Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



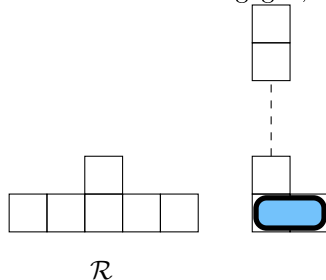
\mathcal{R}

Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

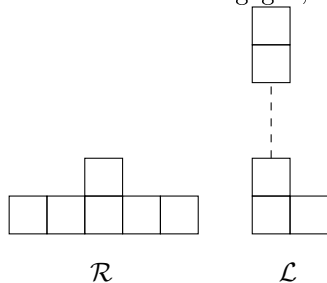


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

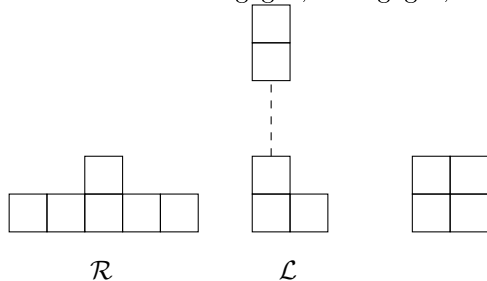


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

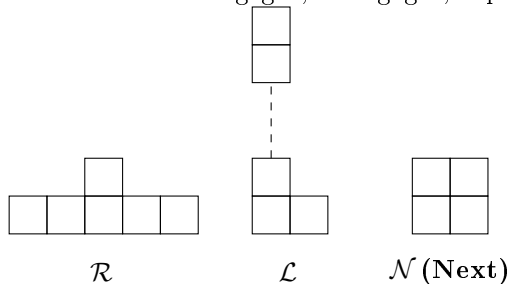


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

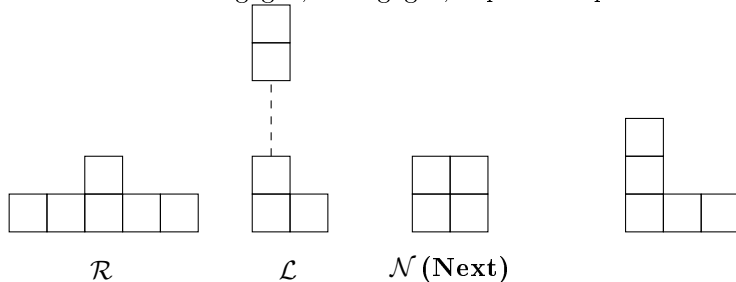


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

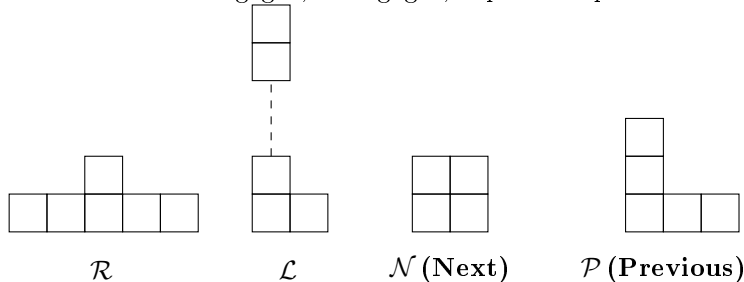


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider qui est le gagnant du jeu, en supposant les deux joueurs intelligents.

Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?

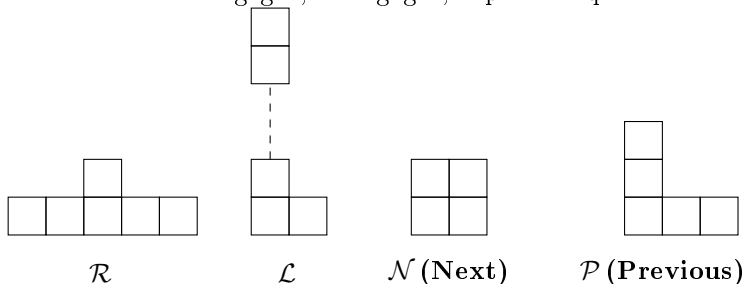


Problématique du domaine

Issue du jeu. Qui gagne?

Décider si un jeu est \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{N} ou \mathcal{P} .

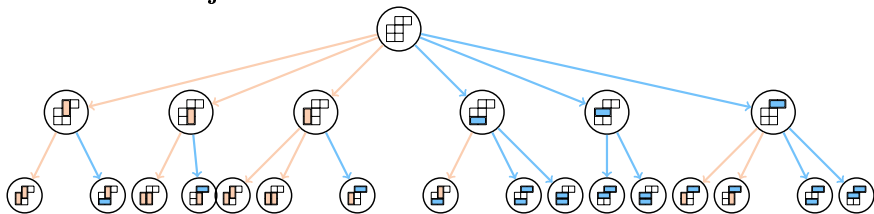
Possibilités : aLine gagne, eRic gagne, dépend de qui commence?



Outil : **arbre de jeu**

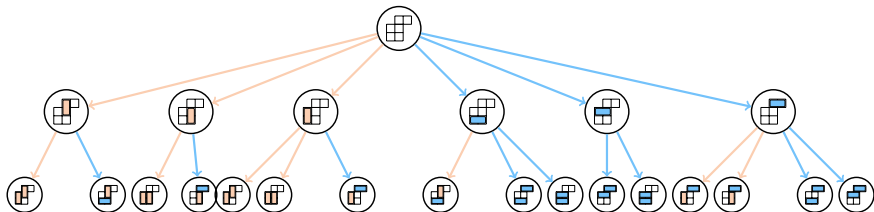
Déterminer l'issue du jeu

Outil : arbre de jeu

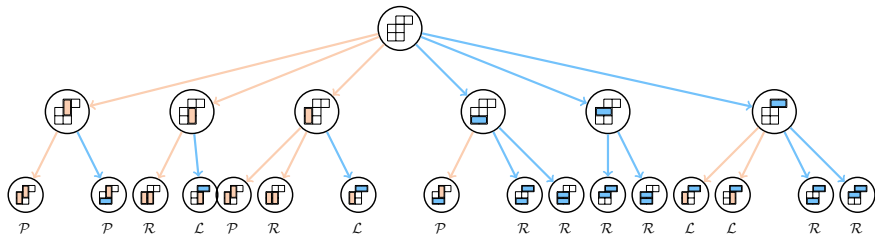


Déterminer l'issue du jeu

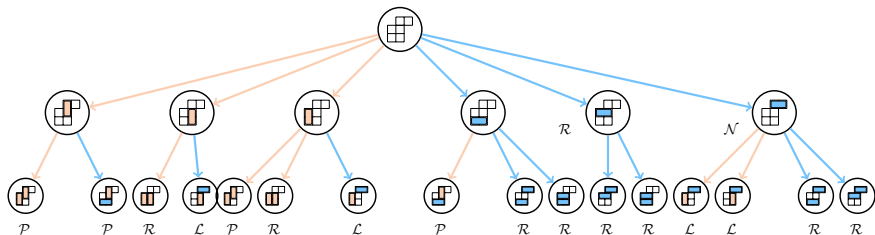
Déterminer l'issue du jeu



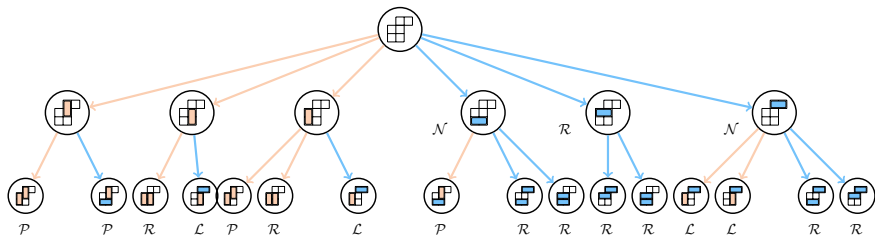
Déterminer l'issue du jeu



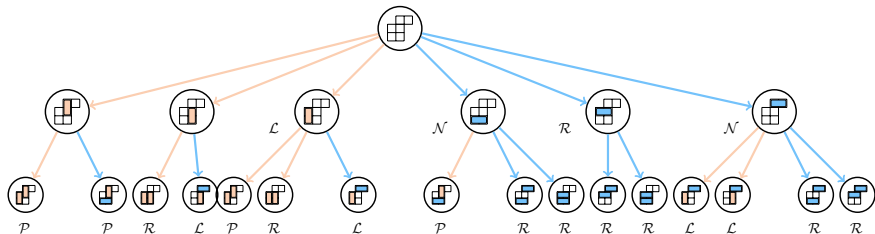
Déterminer l'issue du jeu



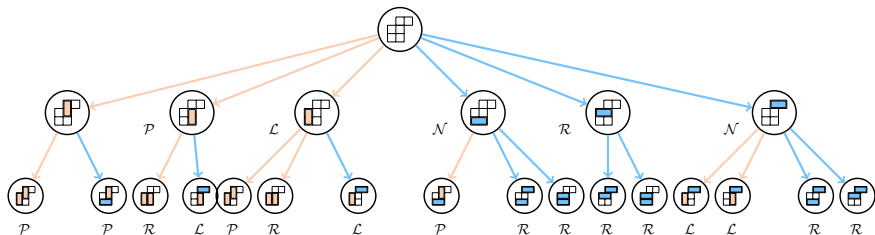
Déterminer l'issue du jeu



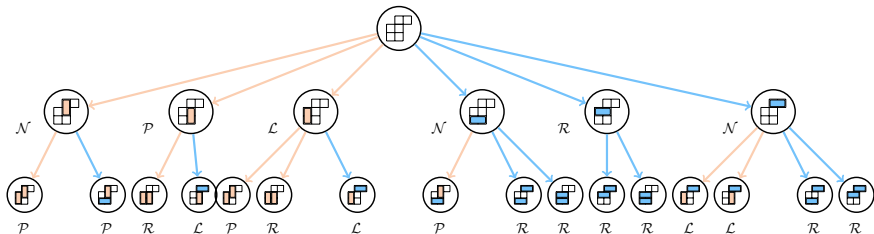
Déterminer l'issue du jeu



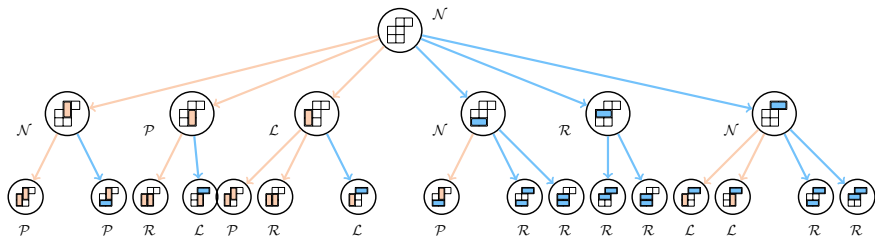
Déterminer l'issue du jeu



Déterminer l'issue du jeu



Déterminer l'issue du jeu



Graphe de jeu : algo exact mais problème de complexité. Outil peu exploitable, sauf pour émettre des conjectures.

Graphe de jeu : algo exact mais problème de complexité. Outil peu exploitable, sauf pour émettre des conjectures.

Théorème

Une position (a_1, \dots, a_n) de NIM est \mathcal{P} si et seulement si $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

Graphe de jeu : algo exact mais problème de complexité. Outil peu exploitable, sauf pour émettre des conjectures.

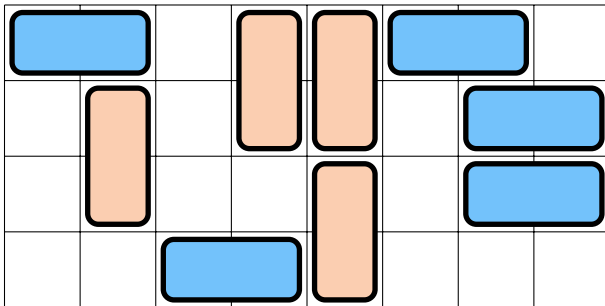
Théorème

Une position (a_1, \dots, a_n) de NIM est \mathcal{P} si et seulement si $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

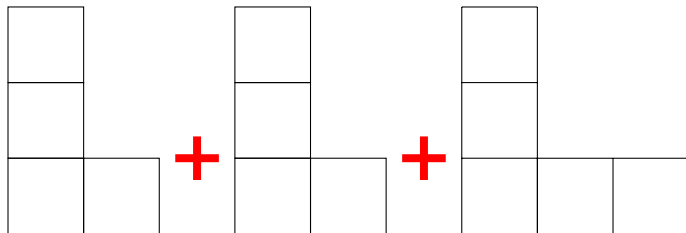
Pour DOMINEERING, la complexité du calcul de l'issue est ouverte.

Autre outil : **somme de jeux**

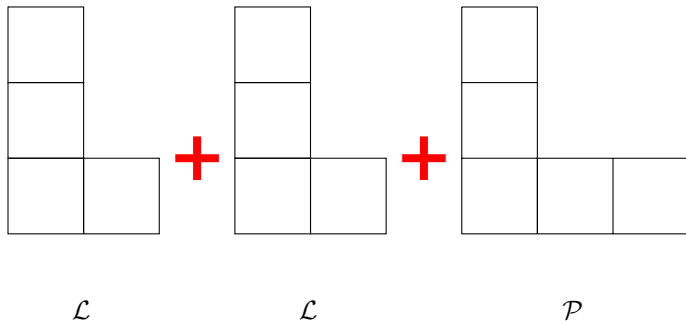
Autre outil : somme de jeux



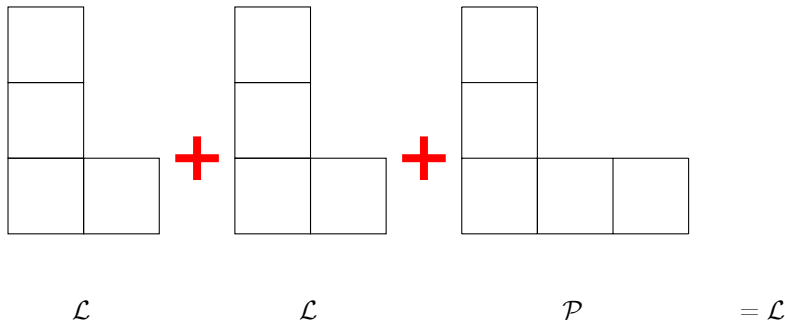
Autre outil : somme de jeux



Autre outil : somme de jeux



Autre outil : somme de jeux



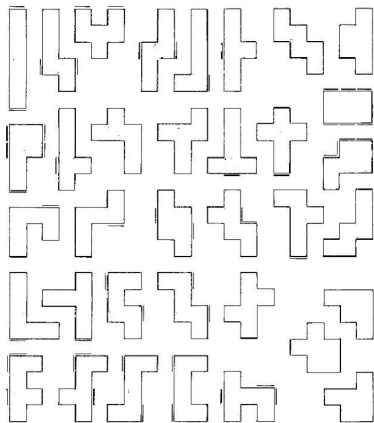
Somme de jeux

Somme de jeux

$+$	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{L}	\mathcal{R}
\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{L}	\mathcal{R}
\mathcal{N}	\mathcal{N}	?	\mathcal{N} ou \mathcal{L}	\mathcal{N} ou \mathcal{R}
\mathcal{L}	\mathcal{L}	\mathcal{L} ou \mathcal{N}	\mathcal{L}	?
\mathcal{R}	\mathcal{R}	\mathcal{R} ou \mathcal{N}	?	\mathcal{R}

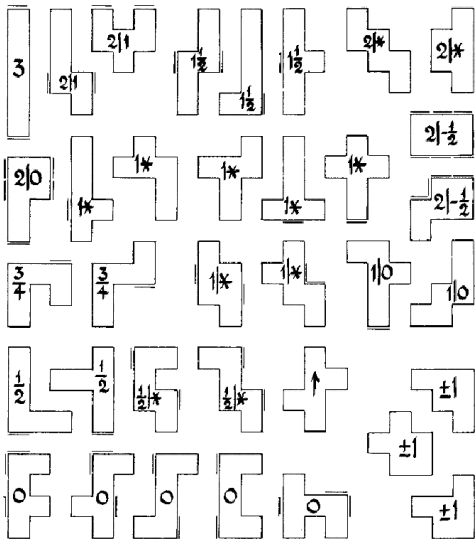
Il reste des sommes non-déterminées... besoin d'affiner la notion d'issue.

Une position de DOMINEERING : comment jouer ?

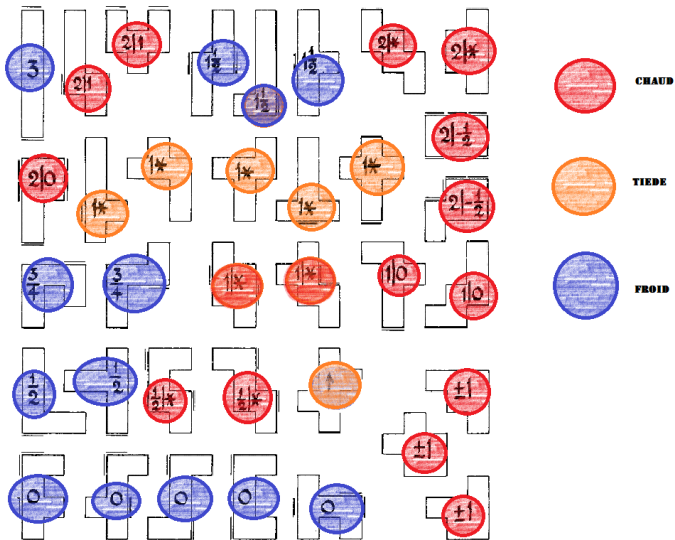


Comment jouer ? Une histoire de température...

Comment jouer ? Une histoire de température...



Comment jouer ? Une histoire de température...



Notions

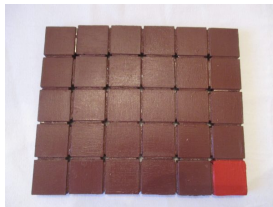
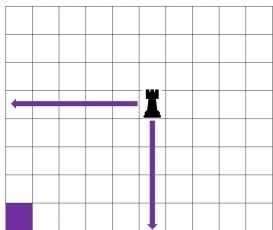
- Jeux impartiaux de préférence
- Gagnant / perdant
- Stratégie gagnante / algorithmme
- Propriété indépendant / absorbant
- Classes équivalence pour le jeu de Nim

Exemple 1 : la course à 20

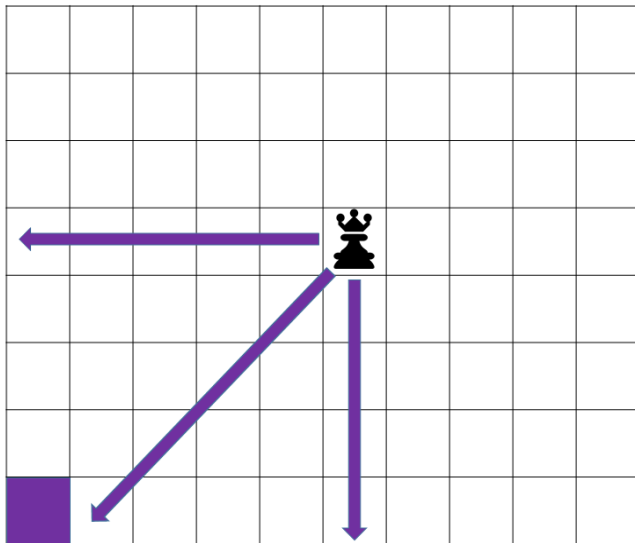


Chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes.

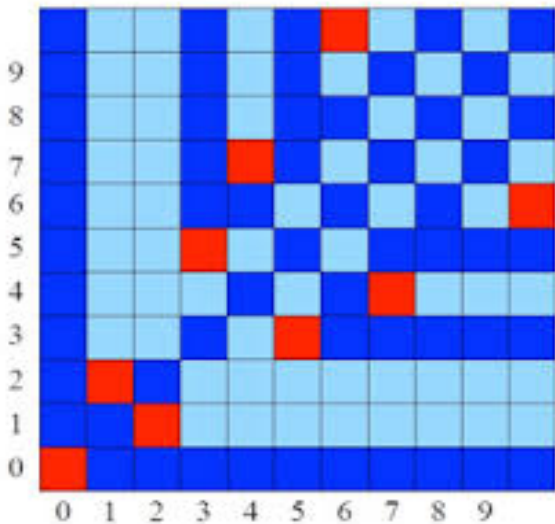
Exemple 2 : Nim sous plusieurs formes



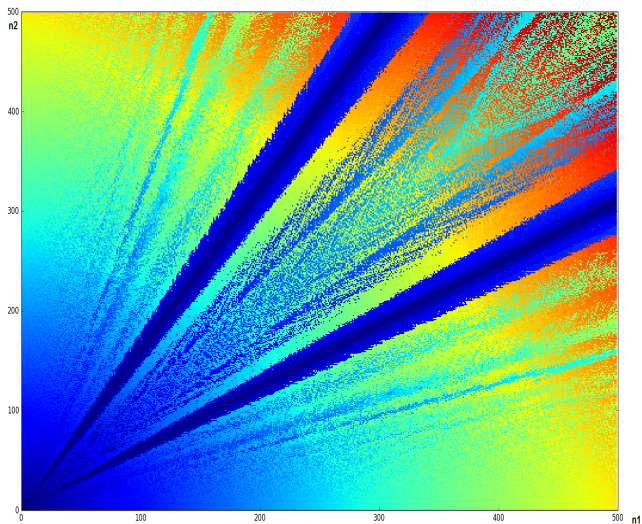
Exemple 3 : Le jeu de Wythoff



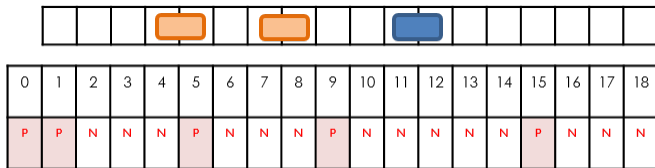
Exemple 3 : Le jeu de Wythoff



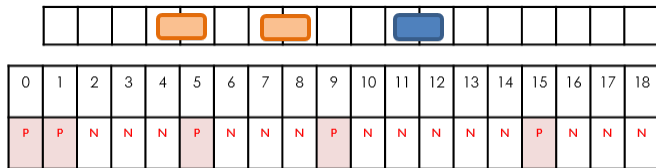
Exemple 3 : Le jeu de Wythoff



Exemple 4 : CRAM SUR UNE LIGNE



Exemple 4 : CRAM SUR UNE LIGNE



Theorem

La séquence des \mathcal{P} et des \mathcal{N} est ultimement périodique, de période 34, et de prépériode 53.

MENACE : la première learning machine pour les jeux

Donald Michie : chercheur britannique en IA

MENACE (1961) : machine qui apprend à jouer toute seule au morpion

Machine avec des boîtes d'allumettes et des perles de couleur

Aucune connaissance au préalable et apprend à bien jouer au fur et à mesure



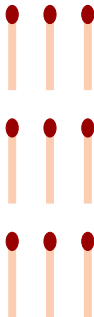
MENACE : configuration

- 304 boites d'allumettes
- Chaque boite contient des perles indiquant les coups jouables
- Au départ, autant de perles de chaque couleur dans chaque boite
- Renforcement / Pénalité selon la fin de partie (Victoire : +3, Nul : +1, Défaite : -1).

<http://www.msccroggs.co.uk/menace/>

NIMBLE : une machine pour le jeu de NIM

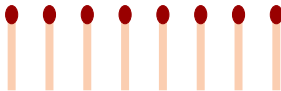
Stuart C. Hight (1962)



- Une boîte pour chaque position de jeu.
- Chaque boîte a au départ des jetons de même couleur vers chaque position accessible.
- Un coup est un tirage au sort d'un jeton.

Atelier : une machine pour la course à 20

Proposé en collaboration avec Florent Madelaine et Malika More (Clermont)



- Jeu sur une ligne où l'on enlève 1 ou 2 allumettes/carambars.
- Des sacs/boites pour chaque position de jeu. Une boite correspond à un "robot".
- Chaque boite a au départ des jetons de même couleur vers chaque position accessible. Ici, deux couleurs.
- Un coup du robot est un tirage au sort d'un pion.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.
- 3 **Equipe de robots** : on prend 3 robots marqués avec des post-it (positions avec 4, 3 et 2 carambars). Changer les proportions de pions au départ.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.
- 3 **Equipe de robots** : on prend 3 robots marqués avec des post-it (positions avec 4, 3 et 2 carambars). Changer les proportions de pions au départ.
- 4 **Apprentissage automatique** : une équipe de robots contre une autre. Un jeton de chaque couleur dans chaque robot. Renforcement pour chaque robot, en dupliquant. Faire une vingtaine de parties.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.
- 3 **Equipe de robots** : on prend 3 robots marqués avec des post-it (positions avec 4, 3 et 2 carambars). Changer les proportions de pions au départ.
- 4 **Apprentissage automatique** : une équipe de robots contre une autre. Un jeton de chaque couleur dans chaque robot. Renforcement pour chaque robot, en dupliquant. Faire une vingtaine de parties.
- 5 **Variante** avec 1,2 ou 3 carambars à retirer et 7 au départ.

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.
- 3 **Equipe de robots** : on prend 3 robots marqués avec des post-it (positions avec 4, 3 et 2 carambars). Changer les proportions de pions au départ.
- 4 **Apprentissage automatique** : une équipe de robots contre une autre. Un jeton de chaque couleur dans chaque robot. Renforcement pour chaque robot, en dupliquant. Faire une vingtaine de parties.
- 5 **Variante** avec 1,2 ou 3 carambars à retirer et 7 au départ.
- 6 **Auto-apprentissage** avec une seule équipe de robots. Retirer les coups "idiots".

Idée de séquence avec les élèves

Travail en groupes de 3 élèves.

- 1 Phase de **découverte** du jeu entre "humains" avec un arbitre, jeu sur une ligne de 7 carambars.
- 2 Compréhension du **codage des coups** : Prise en main d'un seul robot pour le jeu à partir de 4 carambars. Un élève fait jouer le robot en tirant un pion au hasard.
- 3 **Equipe de robots** : on prend 3 robots marqués avec des post-it (positions avec 4, 3 et 2 carambars). Changer les proportions de pions au départ.
- 4 **Apprentissage automatique** : une équipe de robots contre une autre. Un jeton de chaque couleur dans chaque robot. Renforcement pour chaque robot, en dupliquant. Faire une vingtaine de parties.
- 5 **Variante** avec 1,2 ou 3 carambars à retirer et 7 au départ.
- 6 **Auto-apprentissage** avec une seule équipe de robots. Retirer les coups "idiots".
- 7 **Analyse des résultats** : moyenne des robots de tous les groupes. Notion de probabilité, modélisation par un graphe.