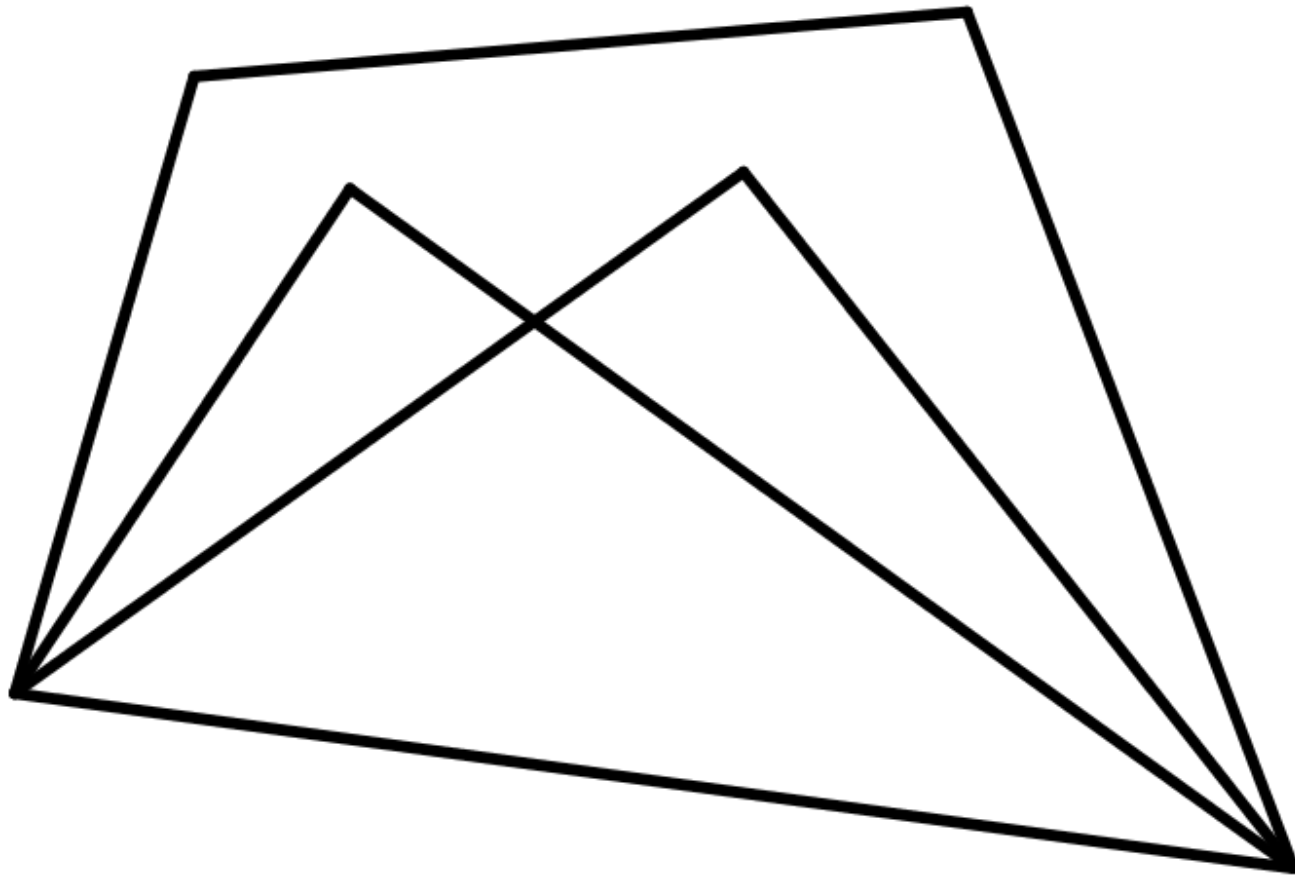


La géométrie en sixième autrement :
restaurations de figures,
déconstruction dimensionnelle
et
usage géométrique des instruments.

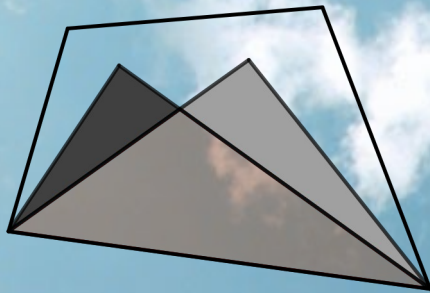
Groupe didactique collège de l'IREM d'Aquitaine
Journée de l'IREM d'Aquitaine
Mercredi 27 novembre 2019

Que voyez-vous ?



La vision « surfaces »

Vision naturelle des jeunes enfants : voir des surfaces.



3 triangles juxtaposés

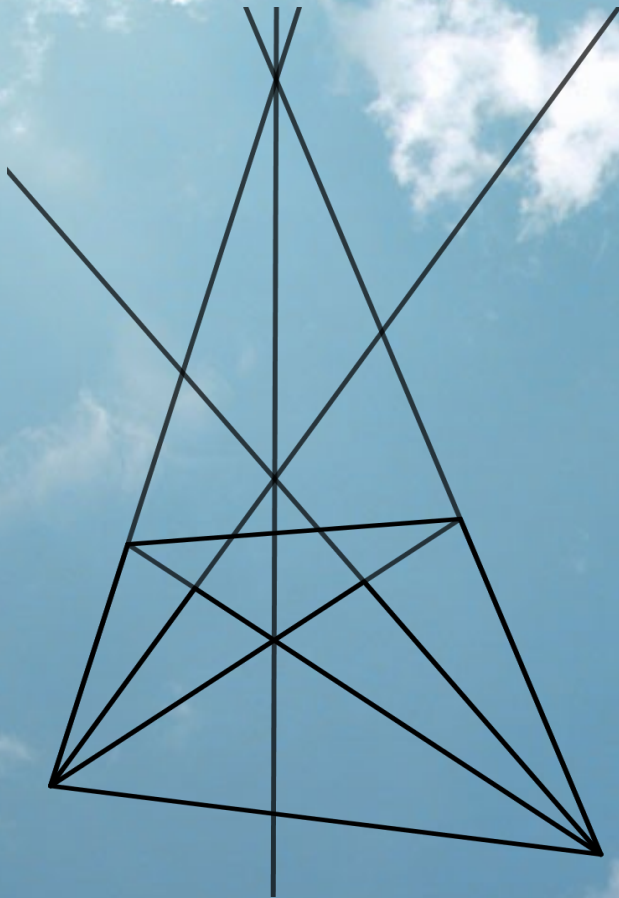


2 triangles superposés

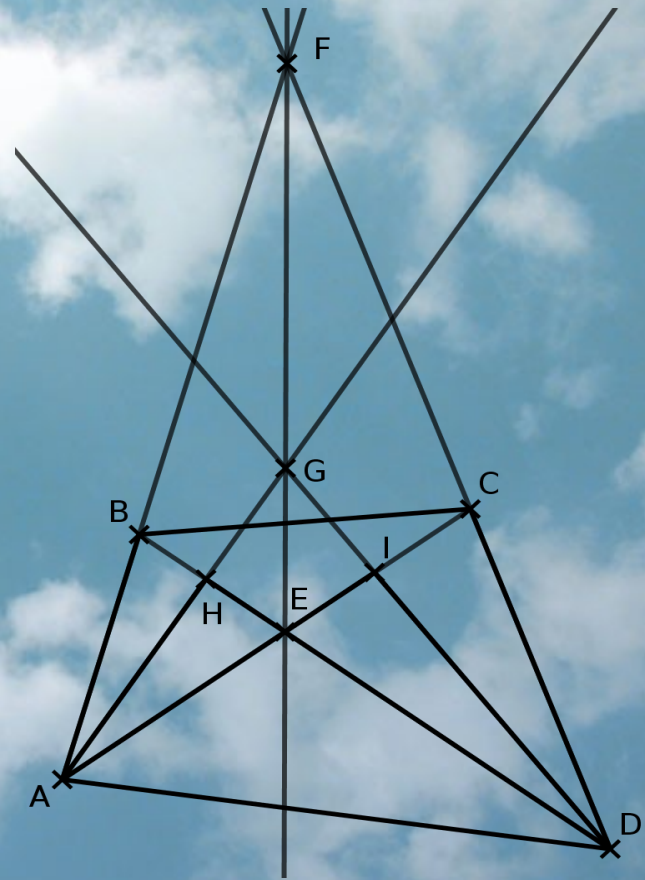
- Lignes comme bords de surfaces.
- Points comme sommets de surfaces ou intersection de bords de surfaces.
- Impossibilité de créer de nouvelles lignes sans déplacer de surfaces...

La vision « lignes », « lignes-points »

Vision lignes



Vision lignes-points



La vision « lignes », « lignes-points »

Pourquoi la vision lignes / points est nécessaire :
parce que pour « parler sur » une figure en termes de propriétés (d'alignement, milieu, parallélisme, etc.) comme cela est attendu au collège, on énonce des propriétés sur une figure.

OR cette vision déconstruite (ou reconstruite) n'est pas spontanée vs la première vision qu'on a d'une figure !

Vision naturelle : surfaces et plutôt juxtapositions.

Or, le regard géométrique sur une figure nécessaire pour la démonstration demande souvent de voir des superpositions plutôt que des juxtapositions de figures simples.

Un assemblage apparaît spontanément comme une superposition ou une juxtaposition au premier coup d'œil selon certaines caractéristiques visuelles de l'assemblage et des figures simples qui le constituent.

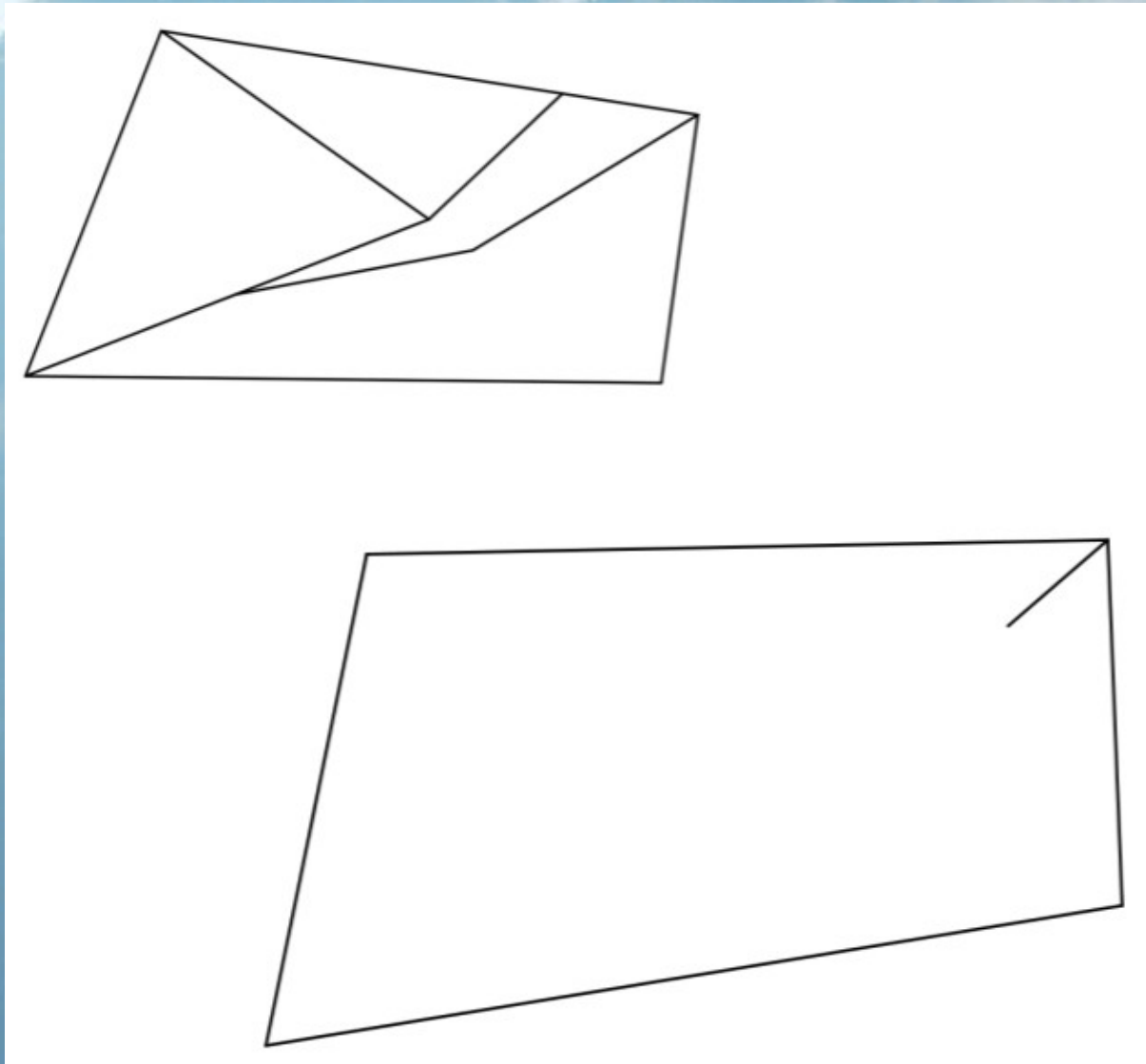
Il n'est pas facile de passer de l'un à l'autre .

(Travaux sur la déconstruction dimensionnelle, Duval & Godin, 2005)

Restauration 1 : à vous de jouer !

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

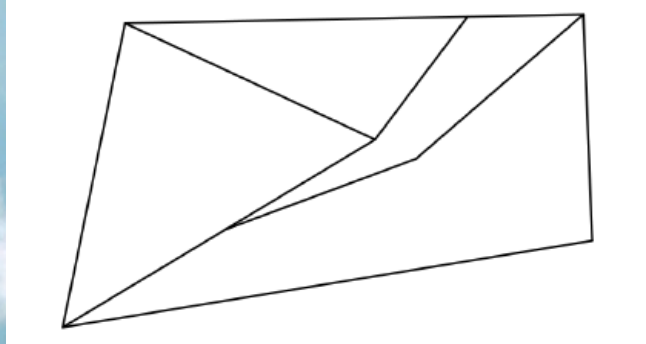
Seule la règle non graduée est à utiliser (ou règle non informable).



Restauration 1 : analyse a priori

- Quelles sont les procédures envisageables des élèves ?
- Quels sont les objectifs ?

Restauration 1 : avec les élèves



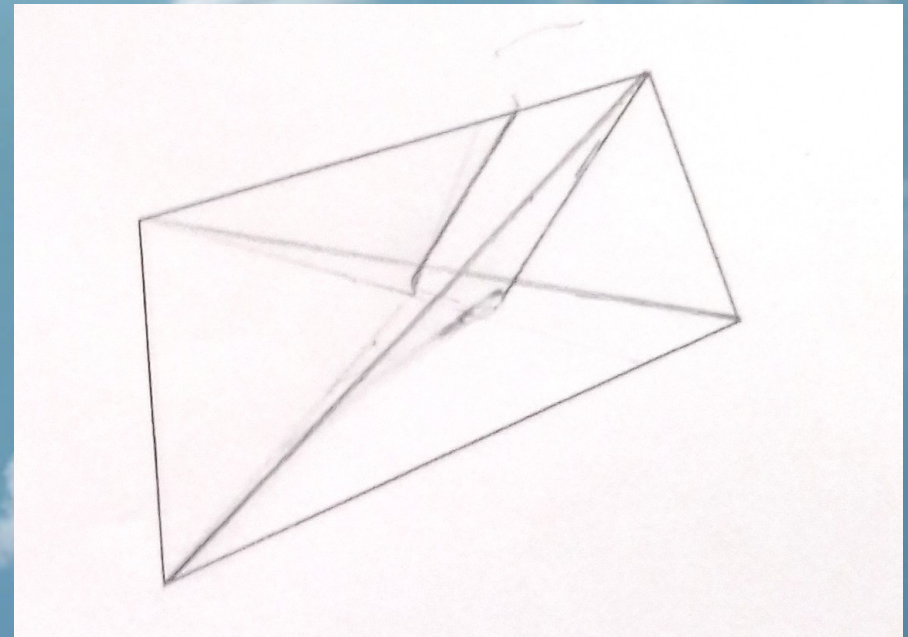
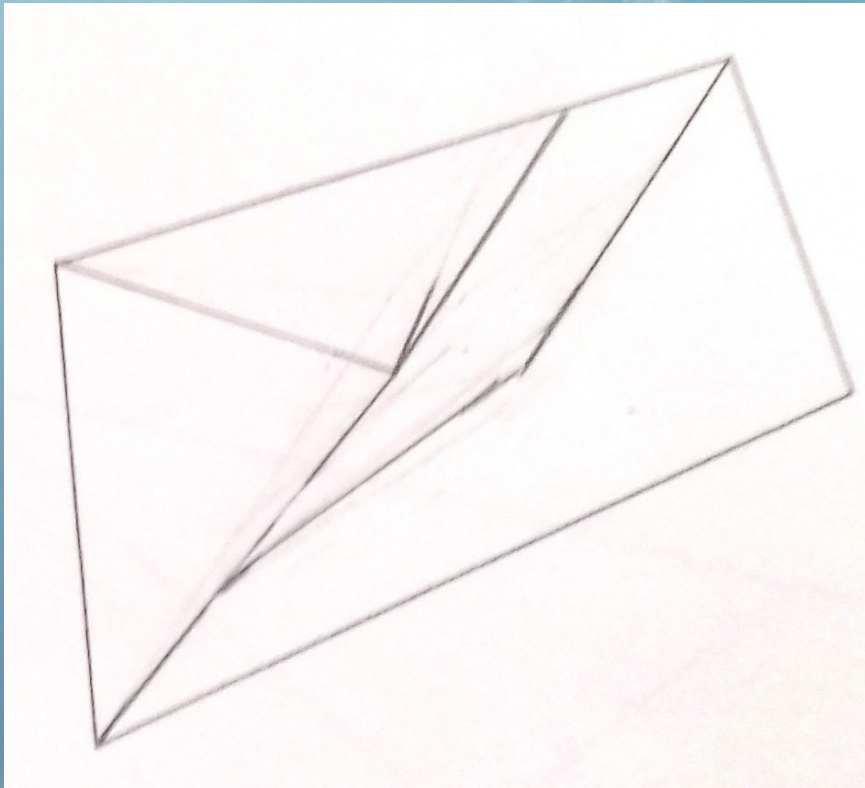
À la question initiale, « que voyez-vous ? »

« pyramide » (revient souvent), « carte postale », « rectangle », « triangles », « une enveloppe » (plusieurs fois aussi), « une branche », « un cadre penché avec un triangle », « des équerres », « triangle équilatéral », « un rectangle avec des côtés penchés et des lignes à l'intérieur. Certains lignes forment des triangles. », « la moitié d'une lettre », « des traits, des triangles », « des segments », « polygone », « moitié d'un éclair »...

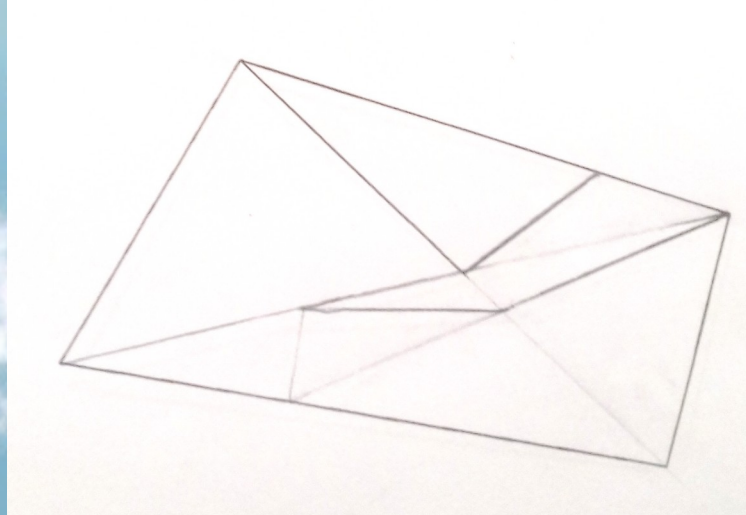
Restauration 1 : productions

Premières procédures erronées

- Les élèves tracent à vue.
- Certains tentent de mesurer quand même.



Restauration 1 : productions

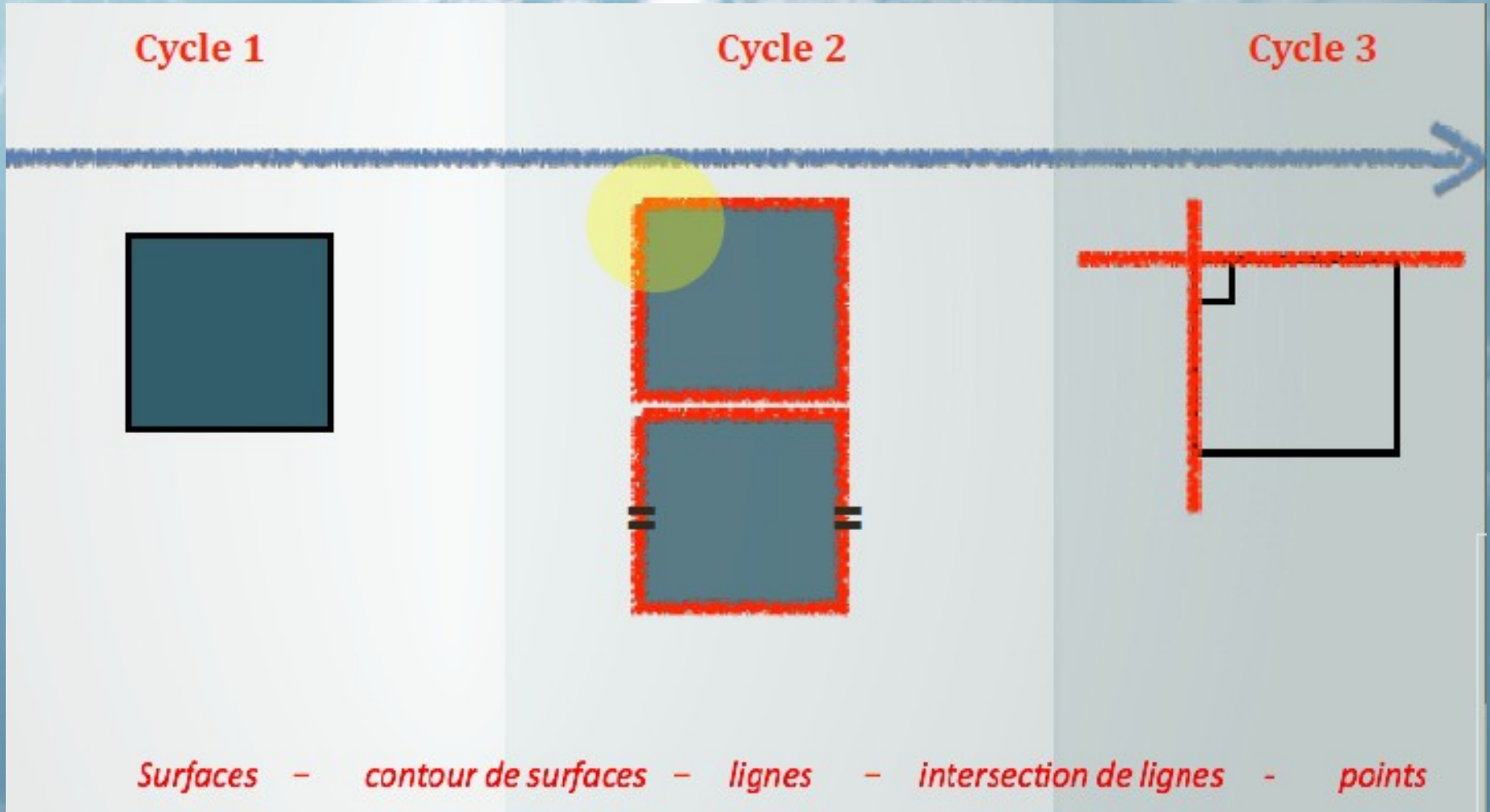


Mais aussi, dès la 2ème phase de recherche, on voit une bonne partie des élèves qui commencent déjà à s'engager sur un vrai travail d'analyse de la figure modèle.

Extrait vidéo ou capture

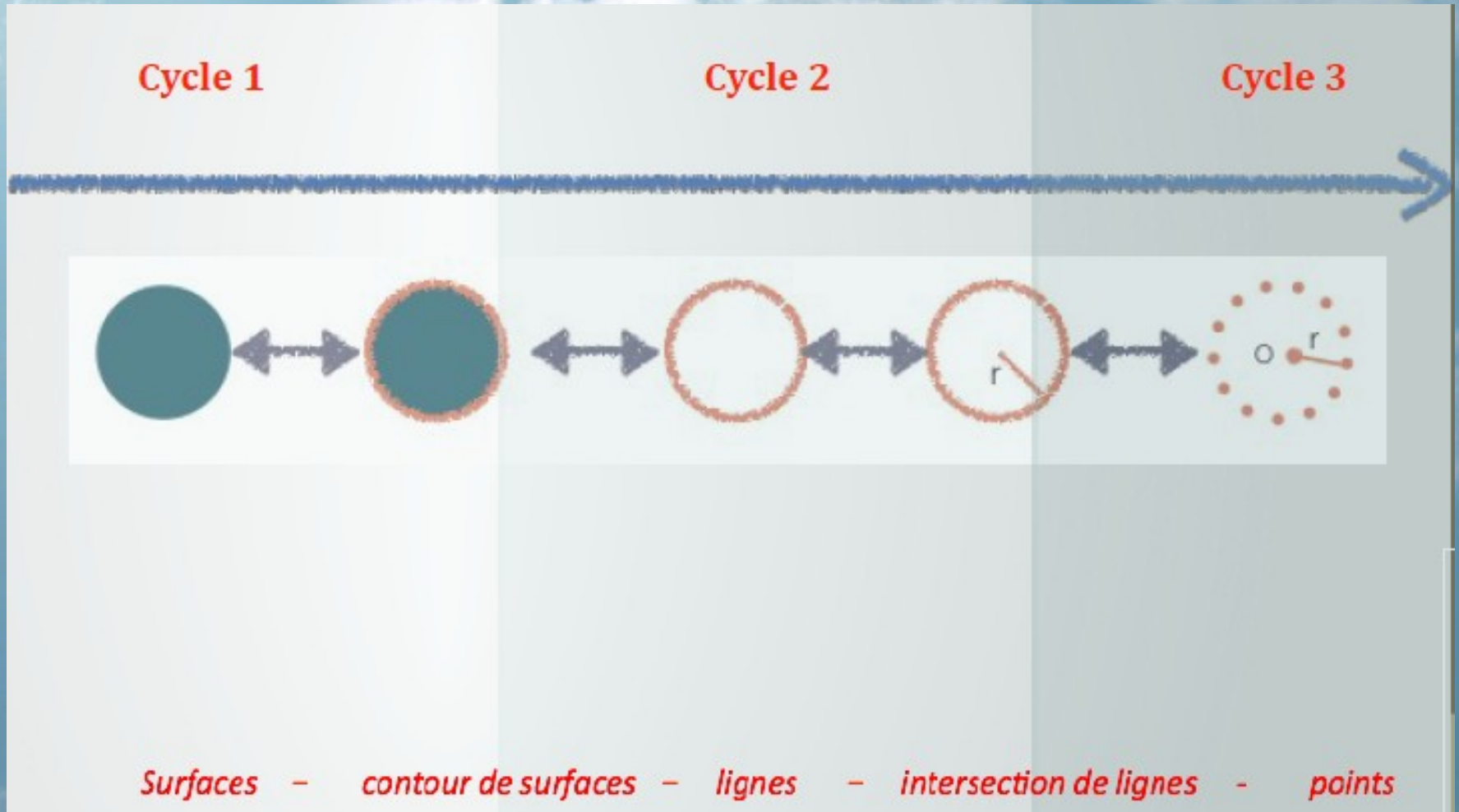
Restaurations : un peu de théorie

Le changement de regard des élèves évolue de la maternelle jusqu'au collège.



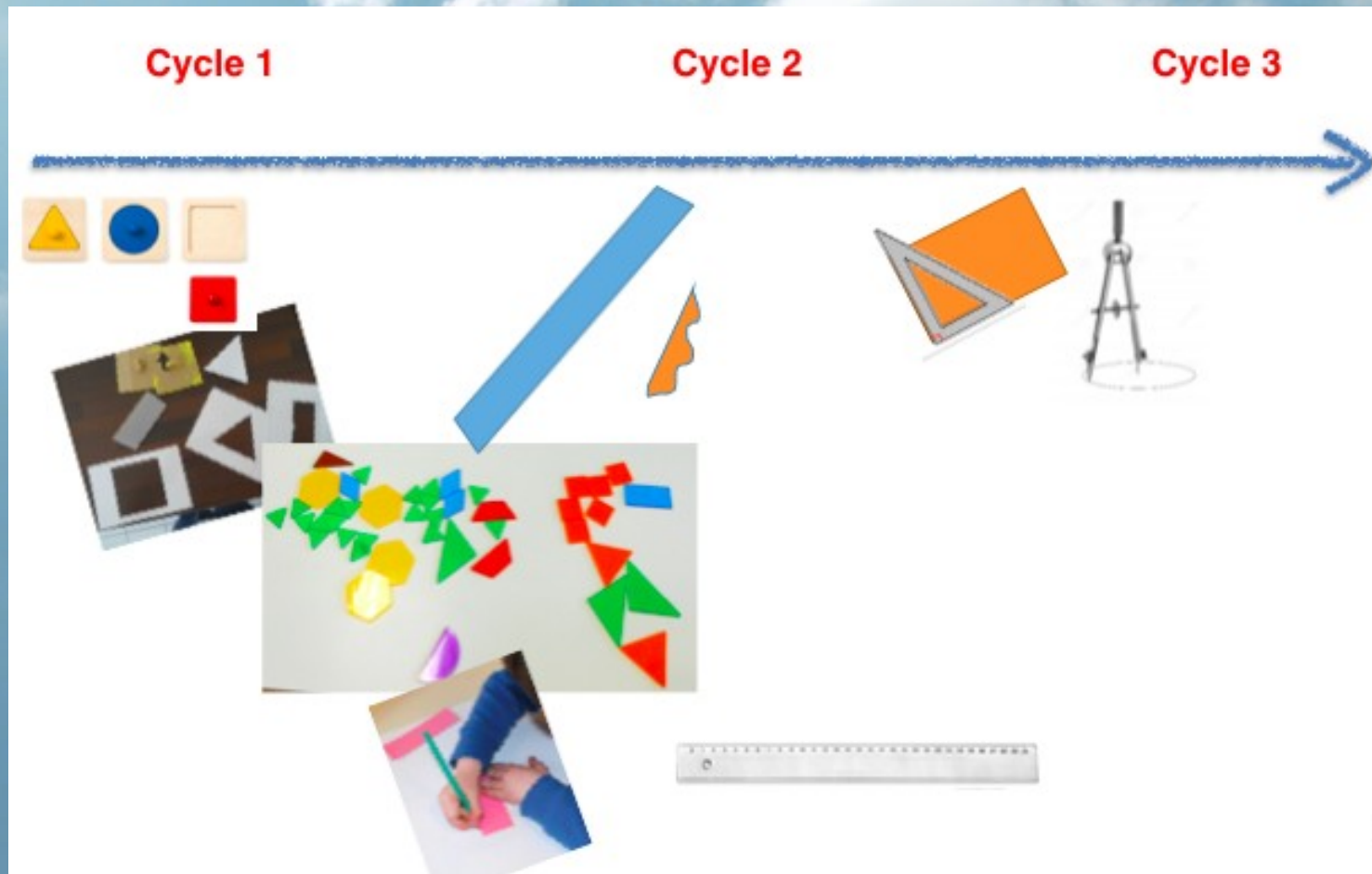
Restaurations : un peu de théorie

Le changement de regard des élèves évolue de la maternelle jusqu'au collège.



Restaurations : un peu de théorie

Ce changement de regard s'accompagne d'une évolution des usages des instruments : du gabarit (qui prend en charge des informations de type surface) au compas par exemple (qui prend en charge des informations de types ligne et point).



Restaurations : un peu de théorie

Cette évolution du regard est explicitement citée dans les programmes maintenant depuis peu.

Restaurations : un peu de théorie

Programme de cycle 3

« Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de **passer progressivement d'une géométrie** où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont **contrôlés par la perception** à une géométrie où ils le sont **par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés** pour aller ensuite **vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation.**

Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de **passer du regard ordinaire** porté sur un dessin **au regard géométrique** porté sur une figure. »

Restaurations : un peu de théorie

Programme de cycle 3

Représenter

- utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc. ;
- produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux ;
- analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points) ;
- reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide ;
- utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.

Raisonner

- résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement ;
- en géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets ;
- progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
- justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

Restaurations : un peu de théorie

Pourtant dans les pratiques usuelles et encore dans certains manuels, on continue de faire comme s'il suffisait de faire une première leçon en définissant « un point, une ligne, un segment, une figure » !

De nombreux travaux parlent de la rupture entre géométrie perceptive et théorique, avec les difficultés et malentendus qu'elle entraîne pour les enseignants et les élèves en début de collège :

Brousseau 1987, Bertelot & Salin 1992, Houdement & Kuzniak 2006, Vergnaud 2001, Duval 2005, Perrin-Glorian & Godin 2018.

Restaurations : (pour)quoi ?

La restauration de figure correspond à la reproduction avec des instruments d'une figure dont on a un modèle et dont une partie (amorce) est déjà fournie directement ou par un gabarit qui permet d'en reporter une partie.

Ce qui diffère de la seule reconstruction, c'est la mise en place d'un raisonnement sur les différences entre les deux figures (modèle et amorce) et la présence de l'amorce qui peut favoriser une procédure.

Il faut trouver des relations, des propriétés permettant de relier l'amorce déjà tracée aux nouveaux objets qu'il faut construire.

Cette action ressemble en tous points à une démarche de type déductive lorsque, dans une démonstration, il s'agit de trouver une propriété à partir d'hypothèses.

Variables didactiques

- choix de la figure ;
- choix de l'amorce ;
- la taille du modèle et de l'amorce ;
- le choix des instruments disponibles ;
- ...

Pour favoriser l'évolution du regard des élèves sur la figure et le mettre en relation avec les propriétés des instruments utilisés, il faut choisir des figures modèles qu'il sera nécessaire d'enrichir.

Un mot sur les instruments

Gabarit, pochoir

Gabarit et/ou pochoir déchirés, morceau de papier...

Surfaces, bords de surfaces.

Règle informable, bande de papier...

Pour reporter des longueurs.

Les instruments de géométrie usuels (règle non graduée, équerre, compas)

Tracés de lignes.

Report de longueur aussi pour le compas.

Gabarit d'angle droit pour l'équerre.

Règle informable vs règle graduée

Ne pas faire intervenir le nombre.

Rester sur les objets géométriques.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Phase 1

- Présentation du modèle : que voyez vous ?
- Recherche écrite individuelle : 1 minute.
- Puis collectivement 5 minutes à l'oral.
- Faire venir quelques élèves au tableau pour montrer les figures repérées.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Phase 2

- Passation de la consigne :

« La figure n'est pas construite n'importe comment, rien n'est tracé au hasard ».

- Seul instrument autorisé : la règle non graduée.
- Puis phase de tracé très courte : la majorité des élèves tracent à vue malgré la consigne et son explication.
- Passer dans les rangs pour le signaler.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Premier bilan intermédiaire

- Que veut dire ne pas tracer au hasard ?

Quelle validation ?

- Repérer des indices sur le modèle avant de tracer pour bien comprendre la figure.
- Usage de la règle à partir des paroles d'élèves :
la règle sert pour prolonger un trait existant (représentant un segment ou une droite) ou relier deux points existants.

Extrait vidéo

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Usage des instruments :
un exemple de bilan

Utilisation des instruments de géométrie

* La règle non graduée

- Elle sert à tracer des traits sans mesurer.
- Pour tracer des traits, on positionne la règle :
 - sur deux points.
 - sur un trait déjà existant.
 - Elle sert à trouver l'alignement de points

* La règle inflexible

- Elle sert à reporter des longueurs sans mesurer.

* La règle graduée

- Elle sert à mesurer des longueurs.
- Elle sert à placer le milieu d'un segment.

* Le compas

- Il sert à reporter des longueurs (sans mesurer) et (symétrie).
- Il sert à tracer des cercles ou des arcs de cercle.
- Il sert à construire des triangles.
- Il sert à construire une droite perpendiculaire à un droite connue.
- Il sert à construire des parallélogrammes : rectangle, losange carré.
- Il sert à construire les droites remarquables : médiatrice et bissectrice.

* L'équerre

- Elle sert à tracer des angles droits, des droites perpendiculaires.
- Elle sert à tracer des droites parallèles.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Usage des instruments : un autre exemple de bilan

Utilisation des instruments de géométrie

RÈGLE NON GRADUÉE	- Elle sert à tracer des traits <u>sans mesurer.</u>
RÈGLE INFORMABLE	Elle sert à comparer des longueurs (pliage, prise de repères)

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Phase 3

- Nouvelle phase courte de construction : il est utile de repréciser la consigne avant de recommencer la construction.
- Prévoir des feuilles supplémentaires !

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Bilan intermédiaire 2

Que faut-il faire pour ne pas tracer au hasard ?

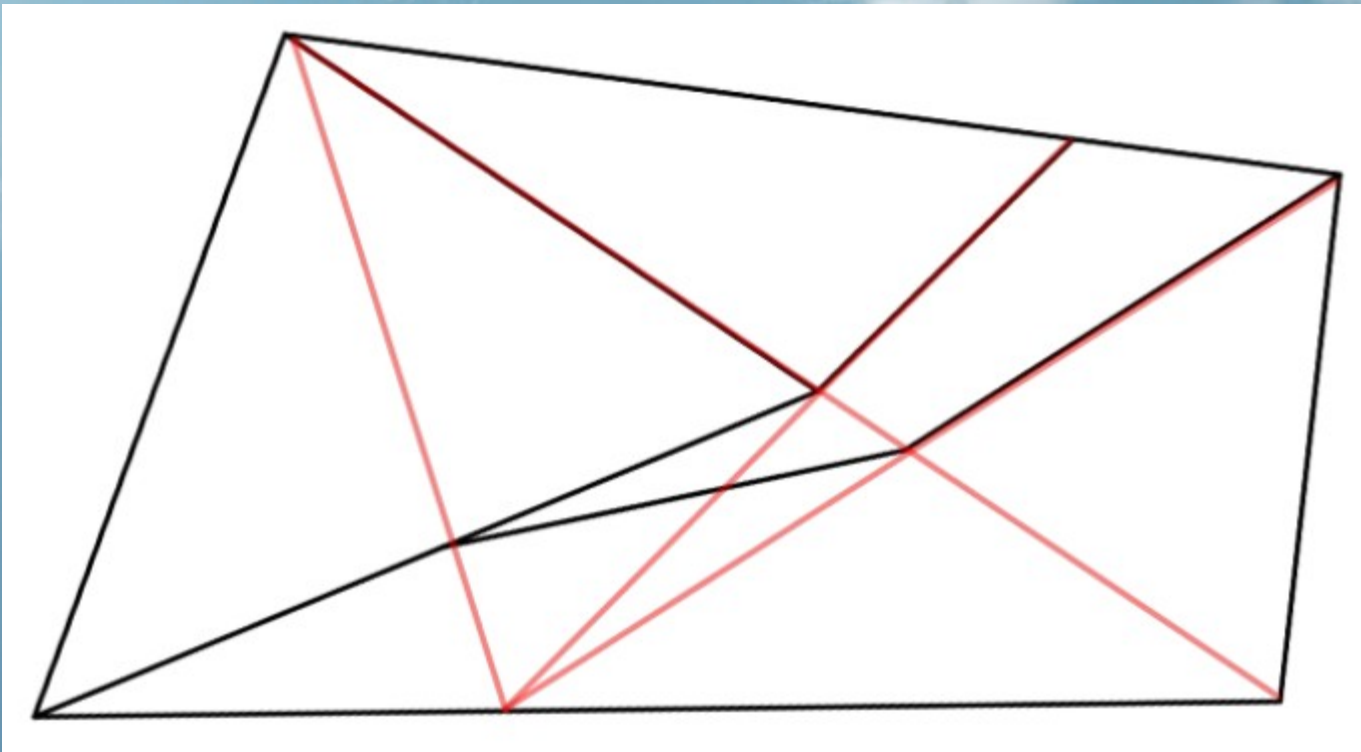
Il s'appuie sur la production d'un élève où des tracés apparaissent sur le modèle.

On explique la nécessité d'analyser la figure modèle et de tracer au préalable dessus.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

Phase 4

Tracés sur le modèle : analyse de la figure.



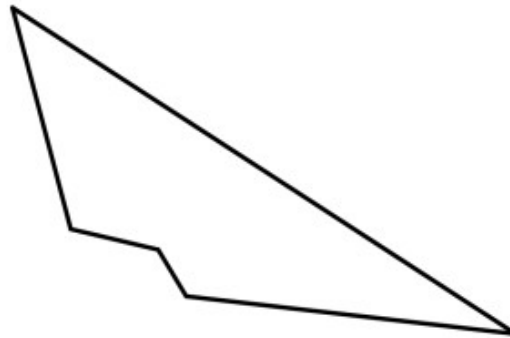
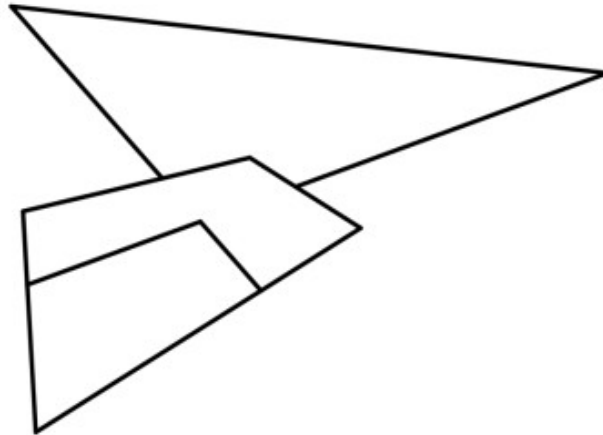
Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

- Tous les élèves ne terminent pas forcément...
- Le modèle et l'amorce sont volontairement de tailles et d'orientations différentes.
- Bilan : pour faire une restauration, il faut chercher des indices, des repères en traçant sur le modèle, repérer aussi des croisements, des intersections.
- Ce bilan est construit avec les élèves, uniquement à partir de leurs remarques.

Restauration 1 : un exemple de mise en œuvre

- Vocabulaire qui peut sortir et être utilisé dans le bilan : segment, droite, point, intersection, alignement, diagonale...
- Si certains éléments n'apparaissent pas à ce moment, ils émergeront dans une prochaine restauration : c'est un travail sur un temps long.
- La nécessité de nommer des points peut apparaître dans une description d'élève afin qu'il soit compris par toute la classe.

Restauration 2 : à vous de jouer !



Tracer un trait avec la règle non graduée coûte 1 point	
Reporter une longueur du modèle coûte 5 points	

Restauration 2 : analyse à priori

- Quel coût pour votre procédure ?
- Quel est l'intérêt du coût des instruments ?

Une autre variable didactique : le coût sur les instruments

Cela permet de favoriser l'émergence des relations, des propriétés que l'on vise.

En jouant sur toutes les variables et en évitant les nombres, on vise à faire émerger des concepts géométriques pour rendre compte de caractéristiques visuelles des figures (repérage d'alignements, par exemple).

Le langage

Nécessité du langage mathématique qui doit évoluer en relation dialectique avec le regard porté sur la figure et les instruments de tracé.

Pour mener et justifier l'activité géométrique, quand on travaille sur du matériel, on a aussi besoin d'un langage précis pour décrire les actions sur les figures ou des objets matériels qui représentent des objets ou propriétés géométriques : «superposer », « faire coïncider bord à bord »...

Point crucial en début de collège dans la relation entre mathématique et réalité :

faire la relation entre les propriétés mathématiques énoncées dans le langage géométrique et les actions sur les objets énoncés dans ce langage, pas tout à fait ordinaire.

Restauration 2 : avec les élèves

- Cette figure permet de retravailler différents alignements :

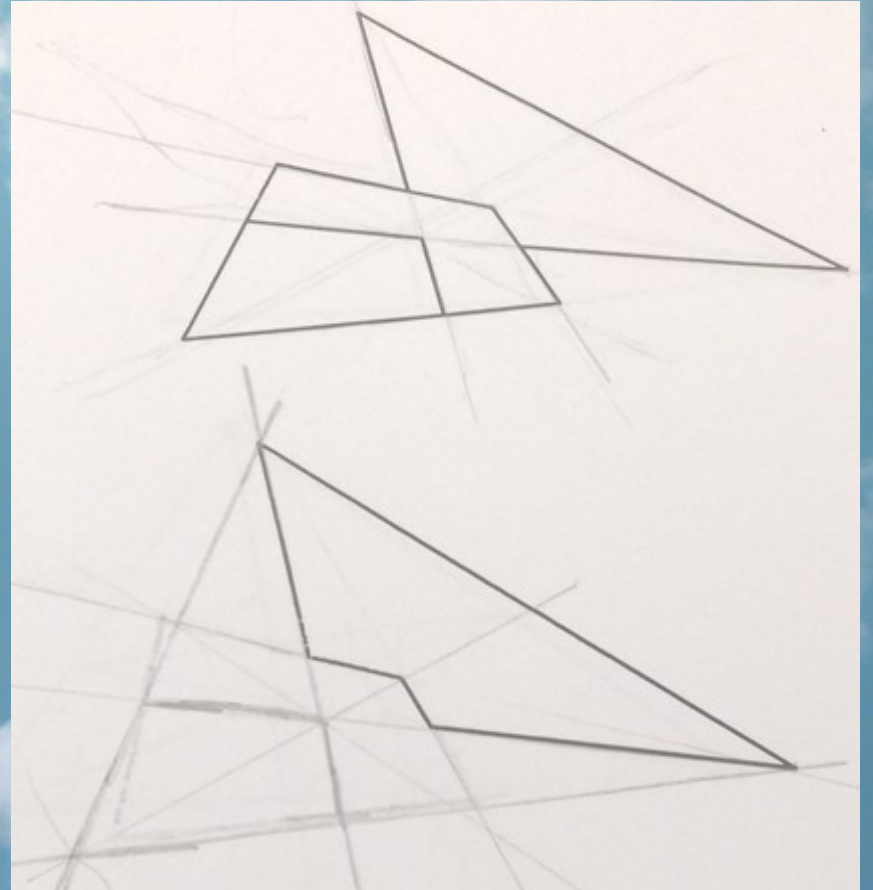
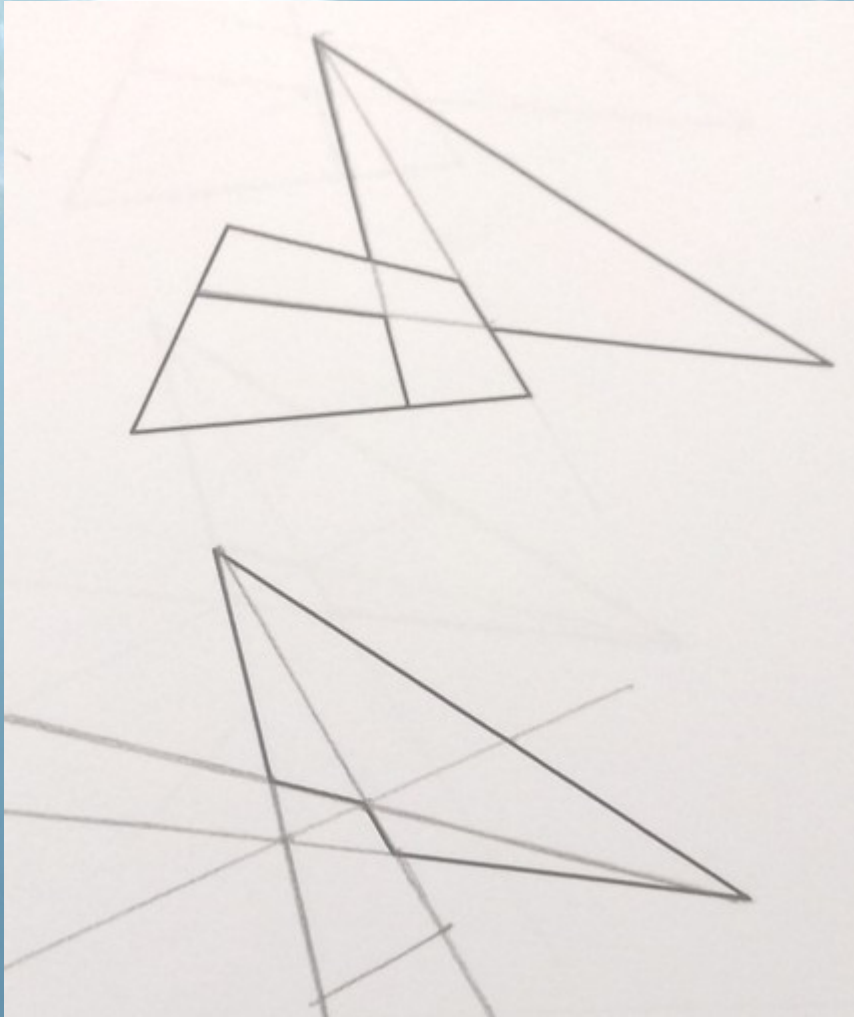
point/segment, deux segments, trois points.

- Des tracés à l'extérieur de l'amorce sont nécessaires.
- Le coût induit une recherche d'efficacité avec les alignements que l'on cherche à privilégier :

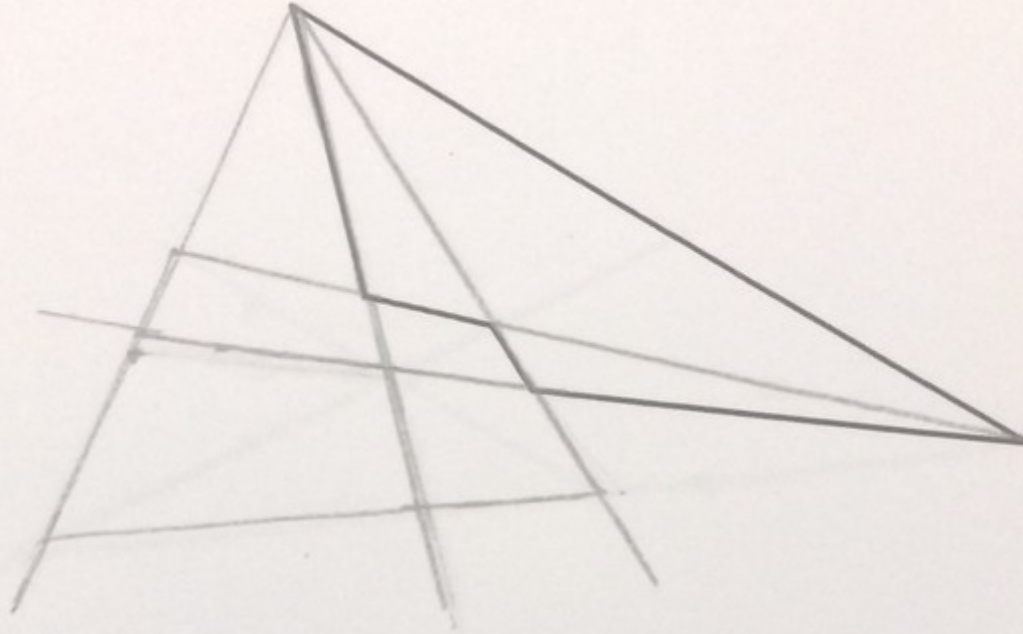
le moindre coût peut être obtenu de différentes façons, mais obligatoirement avec un alignement de 3 points.

- Les opérations sur le modèle sont gratuites !

Trop peu de repères et à vue



3 reports à préciser

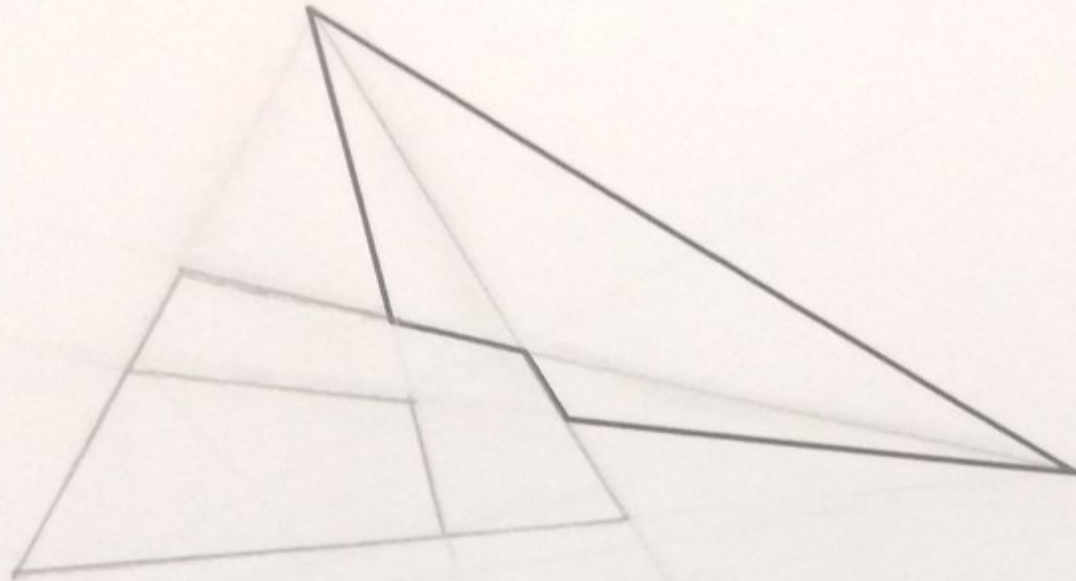


Tracer un trait avec la règle coûte 1 point

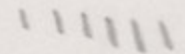
Reporter une longueur du modèle coûte 5 points

4
23

2 reports et une gomme



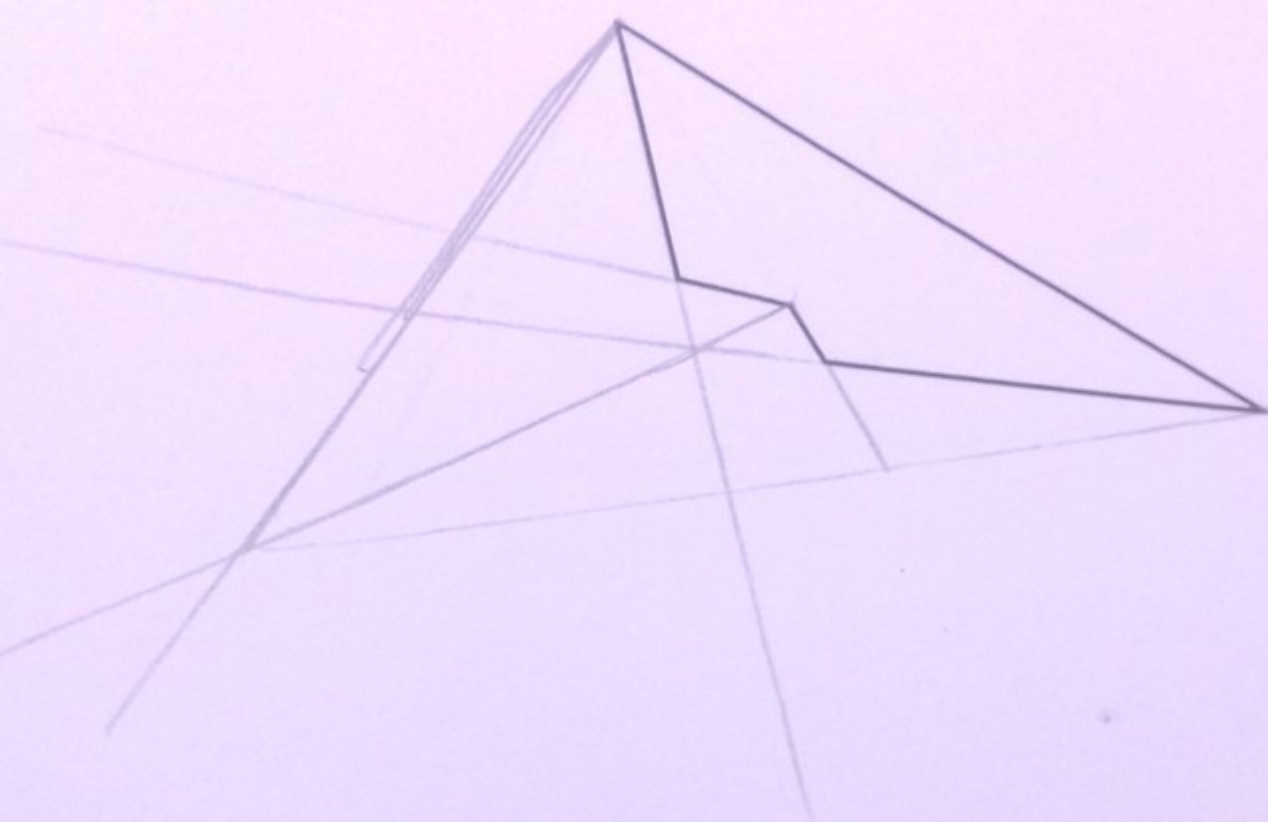
Tracer un trait avec la règle coûte 1 point



Reporter une longueur du modèle coûte 5 points



2 reports sans précision

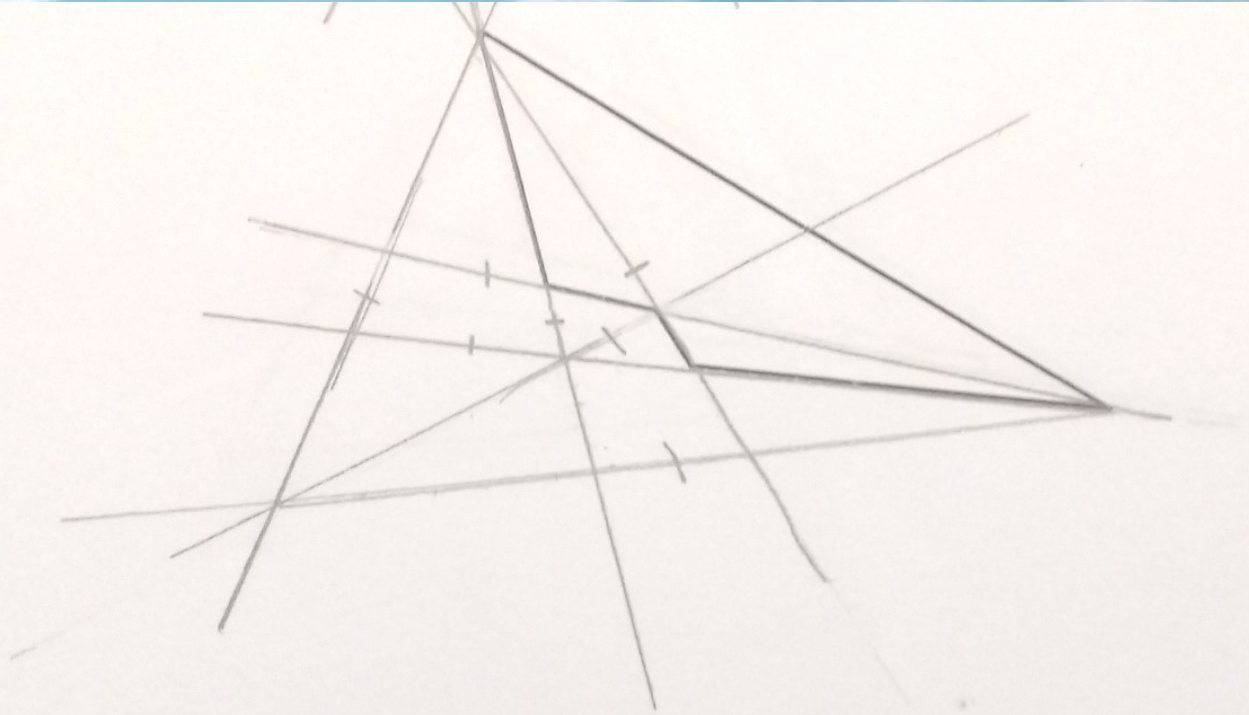


Tracer un trait avec la règle coûte 1 point

Reporter une longueur du modèle coûte 5 points

7
~~10~~ 10 10 10

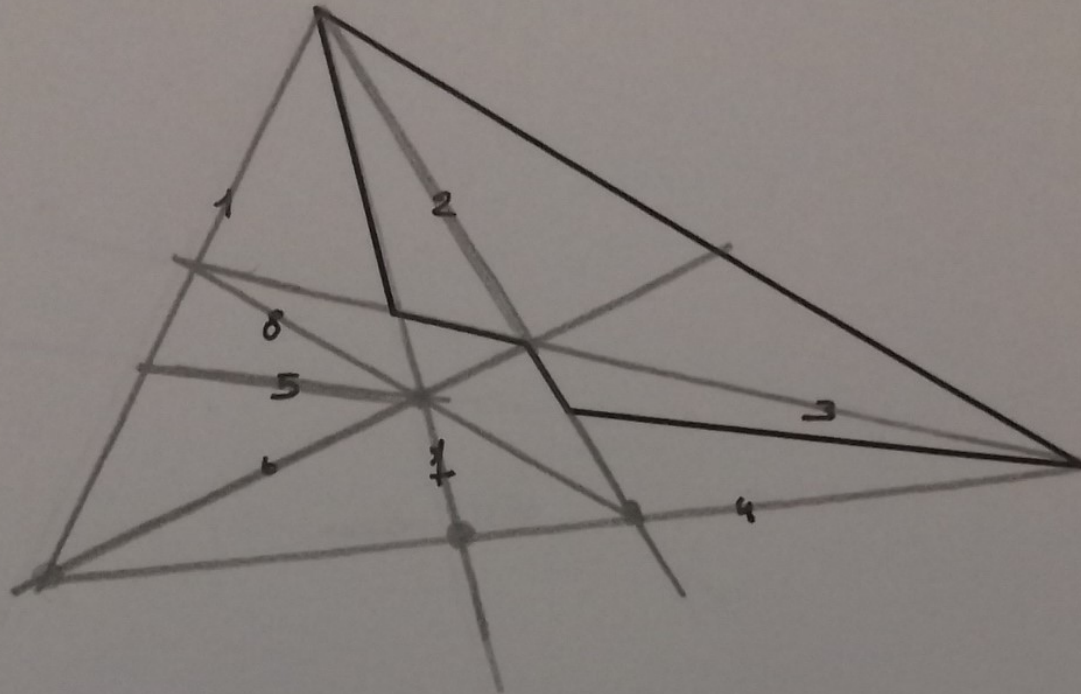
1 seul report et des repères



Tracer un trait avec la règle coûte 1 point	
Reporter une longueur du modèle coûte 5 points	1

12 pts

1 report et numérotation



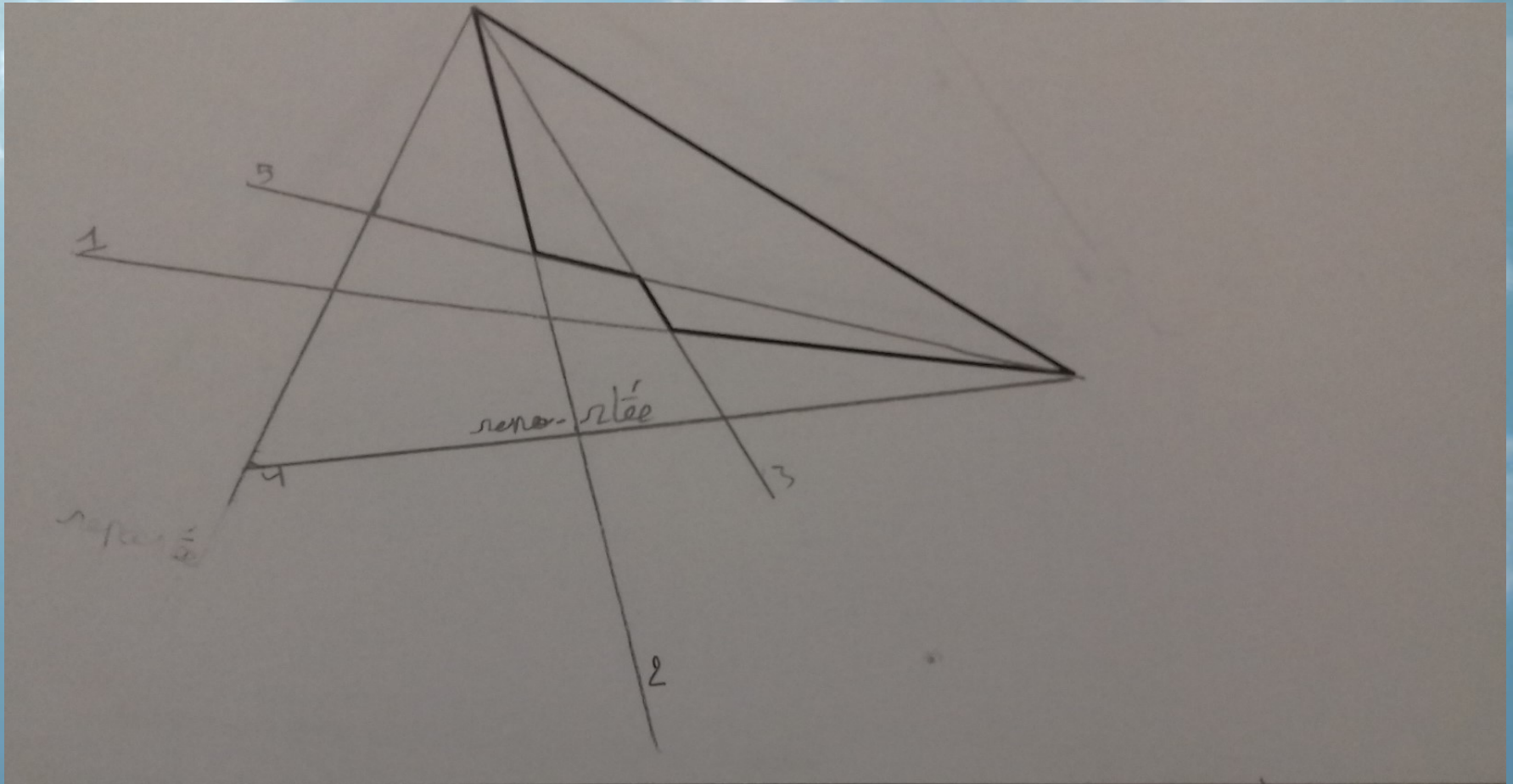
Tracer un trait avec la règle coûte 1 point

8

Reporter une longueur du modèle coûte 5 points

1

1 report et de l'organisation

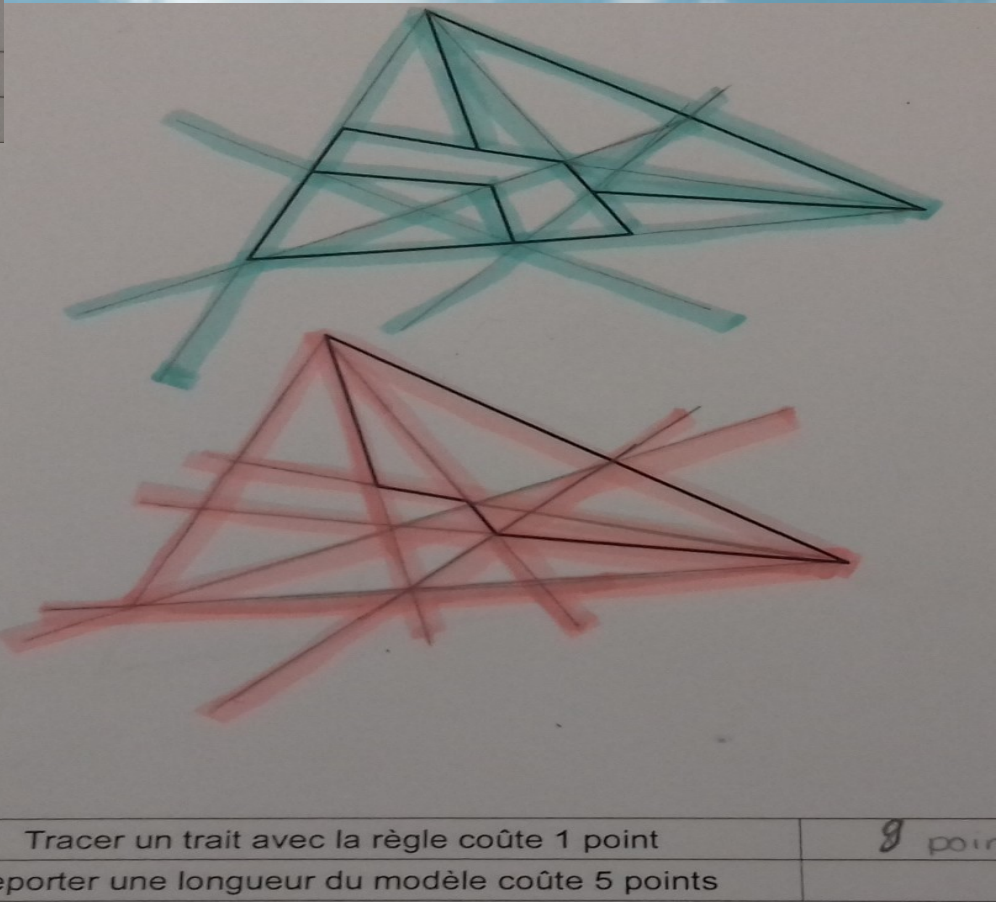
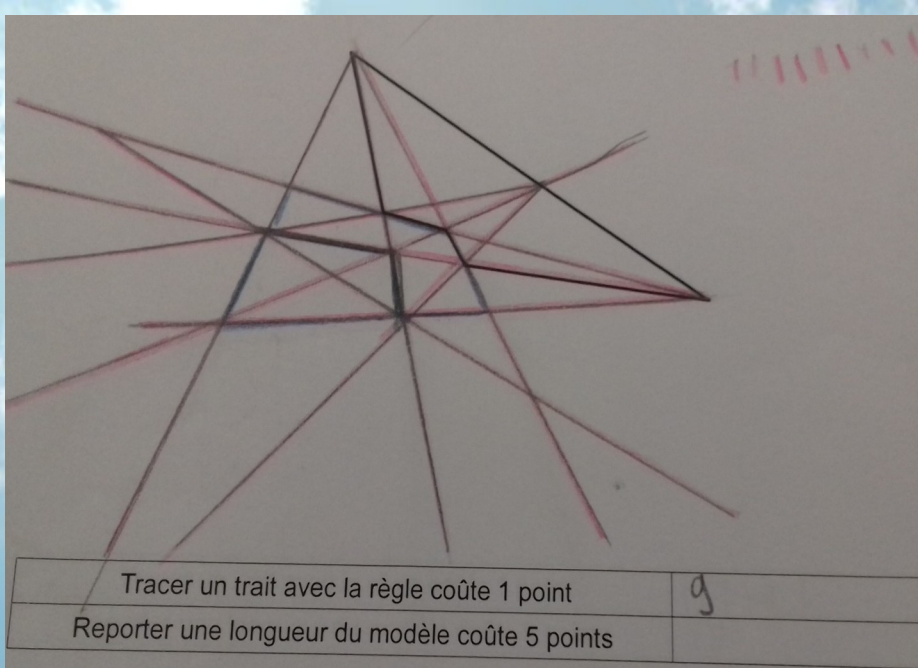


Tracer un trait avec la règle coûte 1 point

Reporter une longueur du modèle coûte 5 points

$$\begin{array}{l} * \quad 5 \\ * \quad 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} * \quad 5 \\ * \quad 1 \end{array}} \right) = 10$$

Faux-alignement et couleurs



Restauration 2 : avec les élèves.

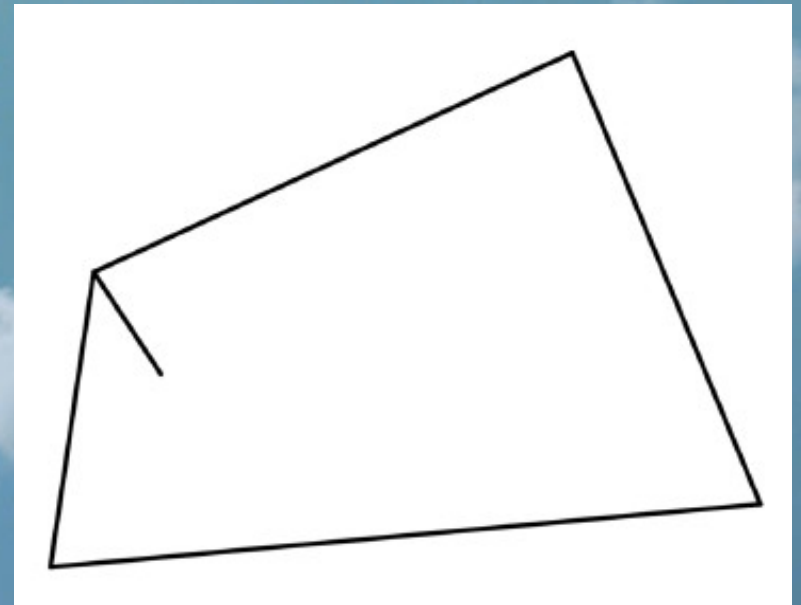
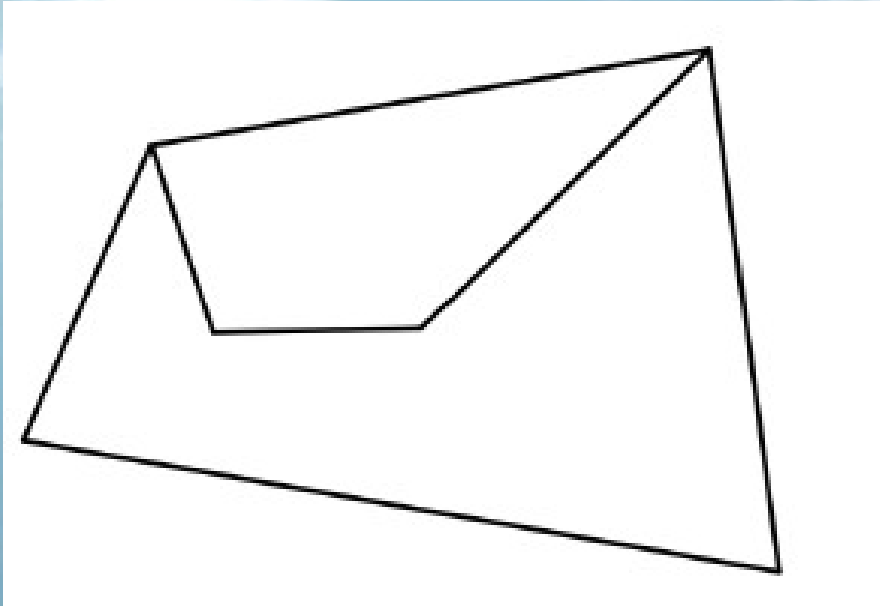
Un bilan sur les objets géométriques

- Un segment est représenté par un trait rectiligne fini.
- Une droite est représentée par un trait rectiligne que l'on peut prolonger autant que l'on veut, elle est infinie.
- Deux traits se coupent en un point.
- Pour tracer une droite, on a besoin d'un segment que l'on prolonge ou de deux points que l'on relie.
- Si plusieurs points sont sur la même droite, on dit qu'ils sont alignés.

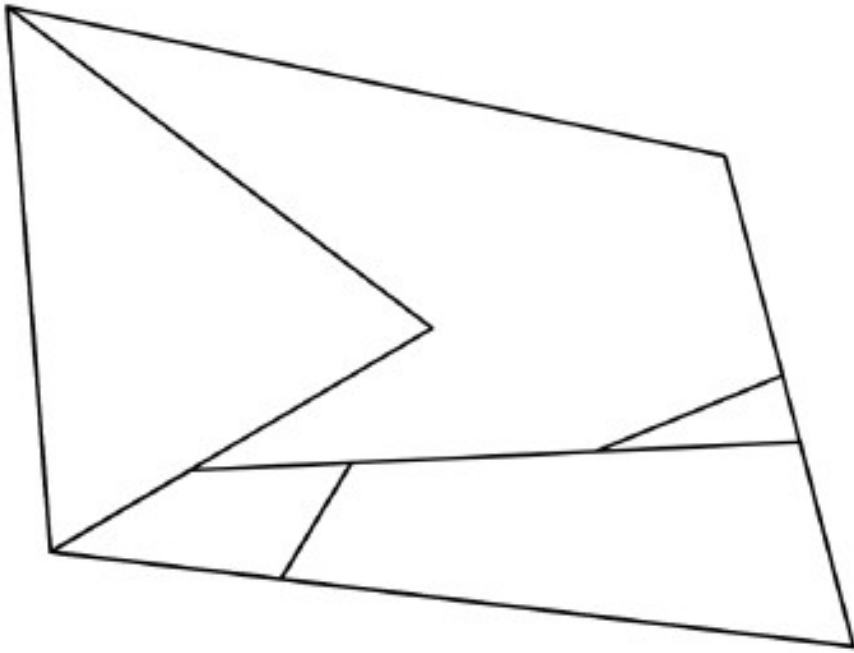
Restauration 2 : quelques incidents...

- Certains élèves rencontrent des difficultés pour compter leurs tracés : possibilité de tracer avec une couleur différente chaque trait (mais même couleur sur le modèle et sur l'amorce).
- D'autres ne repèrent pas l'amorce dans le modèle : faire repasser l'amorce en couleur sur le modèle.
- Enfin, certains s'embrouillent en comptant les tracés : les numéroter (cela aide aussi à repérer l'ordre du programme de construction).

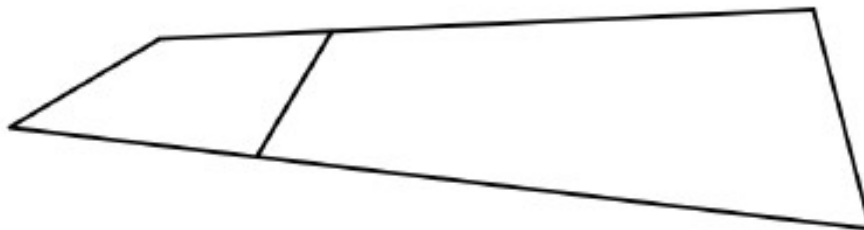
Autre restauration sur le thème point, droite, segment, alignement...



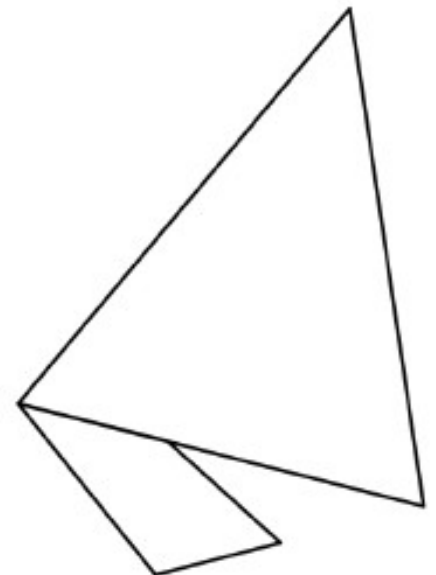
D'autres restaurations en exercice



Amorce 1

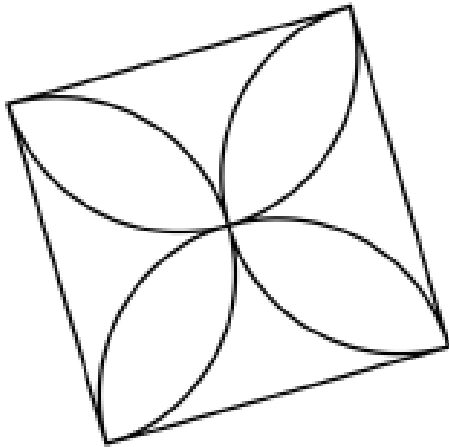


Amorce 2



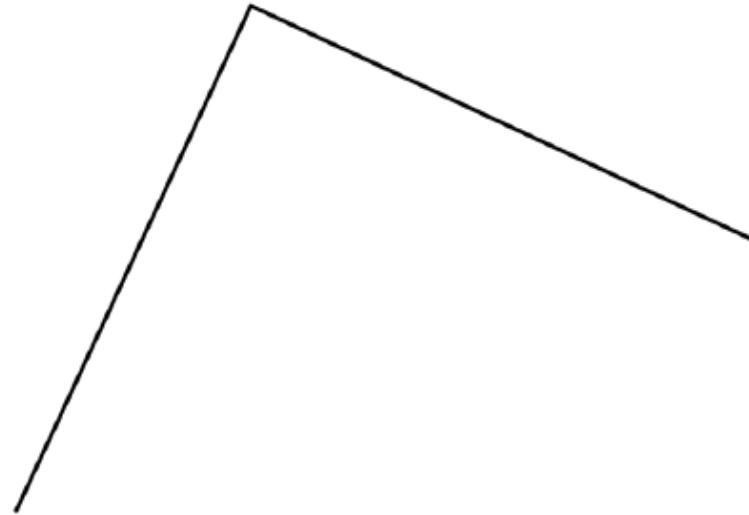
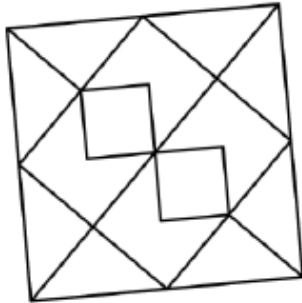
D'autres restaurations : avec les articles

La rosace



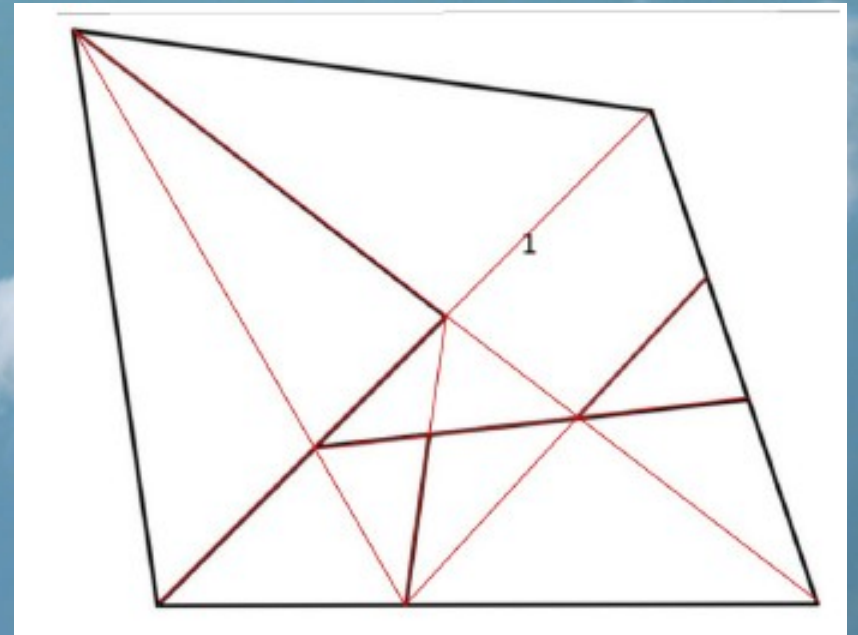
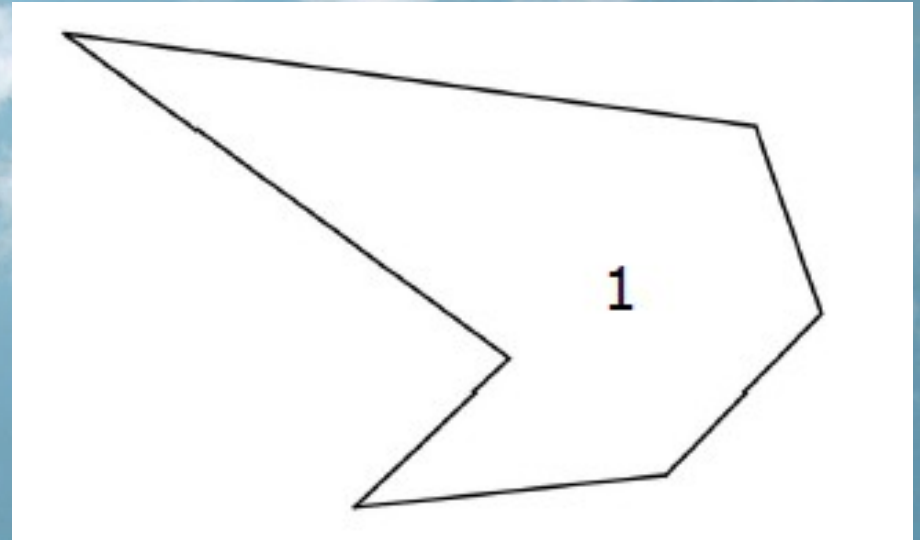
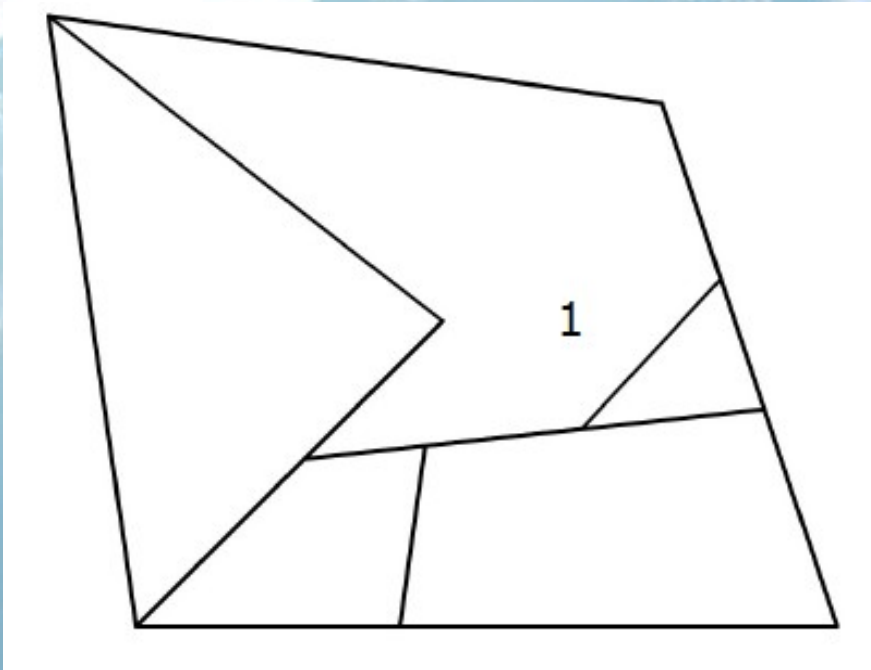
<u>Action</u>	<u>Coût</u>	<u>Comptes</u>
Règle non graduée pour tracer une ligne droite	0	
Règle pour reporter une longueur	10	
Règle graduée	20	
Gabarit d'angle droit	5	
Compas	1	

D'autres restaurations : avec les articles



<u>Action</u>	<u>Coût</u>	<u>Comptes</u>
Tracer un trait (règle)	0	
Utiliser l'équerre	1	
Reporter une longueur (règle informable)	5	
Mesurer une longueur (règle graduée)	10	

D'autres restaurations



Et maintenant ?

Les fichiers pour expérimentation et les articles pour approfondissement bientôt disponibles sur la page des journées IREM.

À vous de jouer !

Biblio

LES CHANGEMENTS DE REGARD NÉCESSAIRES SUR LES FIGURES

Raymond Duval, Marc Godin (IUFM Nord - Pas de Calais)

Grand N n° 76, pp. 7 à 27, 2005

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/76n2_1554801689010-pdf

GÉOMÉTRIE PLANE : POUR UNE APPROCHE COHÉRENTE DU DÉBUT DE L'ÉCOLE A LA FIN DU COLLÈGE

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, LDAR - Laboratoire de Didactique André Revuz EA 4434 , Marc Godin

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document>

COMMENT PEUT-ON PENSER LA CONTINUITÉ DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DE 6 À 15 ANS ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, laboratoire de Didactique André Revuz, Anne-Cécile Mathe, laboratoire de Mathématiques de Lens, Régis Leclercq, inspecteur de l'Éducation Nationale

REPÈRES - IREM. N° 90 - janvier 2013

<http://numerisation.univ-irem.fr/WR/IWR13003/IWR13003.pdf>

DROITES PERPENDICULAIRES AU CM2 : RESTAURATION DE FIGURE ET ACTIVITÉ DES ÉLÈVES

Thomas Barrier, LML, ESPE Lille Nord de France, Université d'Artois, Christophe Hache, LDAR, Université Paris Diderot, Anne-Cécile Mathé, LML, ESPE Lille Nord de France, Université d'Artois

Grand N n° 93, pp. 13 à 37, 2014

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/93n3_1553763144264-pdf

ESSAI D'UNE PROGRESSION SUR LE CERCLE POUR L'ÉCOLE PRIMAIRE : UNE TRANSITION CLÉ, DU GABARIT AU COMPAS

Caroline Bulf, ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux, Valentina Celi, ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux

Grand N - n° 97, 2016 - pp. 21 à 58

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/97n2_1552556028428-pdf

Site « aider ses élèves » (Marc Godin)

<https://www.aider-ses-eleves.com/>