De la géométrie de Léonard de Vinci à la réalisation d’une assiette

Niveau : 6ème – également possible en CM2

Descriptif rapide : construction de rosaces qui serviront de base pour le décor d’une assiette.
Objectifs :

Mathématiques : -Analyse géométrique de figures, reconnaissance de symétries. -Reconnaissance des différentes figures de base. -Vocabulaire lié à ces figures. -Tracé de cercles, de rosaces et de carré avec la règle et le compas. -Dans un deuxième temps rédaction de programmes de construction.	Arts Plastiques :

Durée :

Maths 4 séances	Arts Plastiques 2 séances

Prérequis :

Maths : -utilisation des instruments de géométrie. -avoir déja rencontré les figures de base et le vocabulaire associé. -reconnaître des symétries.	Arts Plastiques

Matériel :
Matériel de géométrie (compas, ...)
Papier calque
Papier carbone
Gouache, gobelets
Assiette en faïence

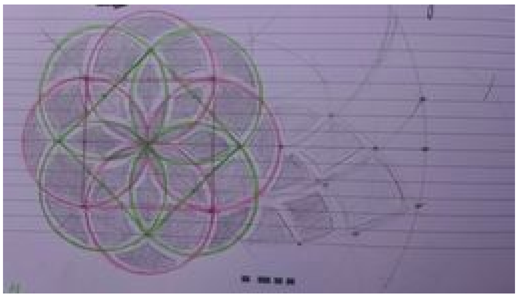
Motivation

Nous avons eu l’idée de cette activité après avoir été sollicités par le musée de la faïence de Samadet. Le principe était de faire voir des assiettes aux élèves, de les faire travailler sur des modèles, et qu’ils puissent ensuite peindre leur propre assiette.

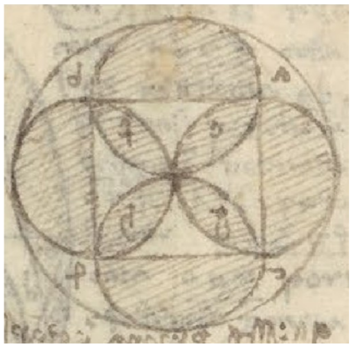


Sur ces assiettes, on observe de nombreuses symétries, des rosaces ou des étoiles avec un nombre variable de branches.
En particulier, l’examen des motifs d’une très belle assiette jaune nous a évoqué des dessins de Léonard de Vinci, que Marc Moyon[1] avait présentés lors d’une conférence.

L'assiette jaune (Musée de Samadet)



Analyse géométrique de la décoration de l'assiette



Dessin de Léonard de Vinci (Codex Atlanticus, p 471)

Nous proposons une activité en quatre temps :
-Présentation des assiettes
-Travail sur les dessins de Léonard de Vinci, recherche des symétries, élaboration de programme de construction (en fonction des classes) pour des rosaces variées
-Personnalisation de leurs dessins pour préparer le motif de leur assiette
-Peinture des assiettes.
Cette activité a pu être mise en œuvre dans des classes de CM2 et de 6ème, notamment dans le cadre du dispositif Regards de Géomètres de l’association Maths en Scène.
Le fait de terminer avec « sa propre assiette » (même si les conditions de cuisson font qu’elle n’est que décorative, ils ne peuvent pas manger dedans), est très motivant pour les élèves. De plus, comme souvent, des constructions mathématiquement incorrectes peuvent donner lieu à des assiettes réussies.

Si la confection d’assiettes est difficile à organiser, on peut aussi imaginer un travail artistique en peinture « style vitrail ».

Nous commençons par rappeler pour l'enseignant quelques propriétés mathématiques des rosaces à 6, 4 et 8 pétales, avant de décrire plus en détail l’activité proprement dite et de montrer quelques

---

1 Enseignant-chercheur en histoire des mathématiques à l’Université de Limoges, coordonnateur avec Dominique Tournès du livre « *Passerelles - Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* »

photos d’œuvres d’élèves (dessins et assiettes). On termine par une fiche élève tirée du livre *Passerelles - Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (coordonné par Marc Moyon et Dominique Tournès, éditions ARPEME).

Rosaces : un point de vue mathématiques pour les professeurs des écoles et les enseignants de collège.

Le Robert donne comme définition pour « rosace » :

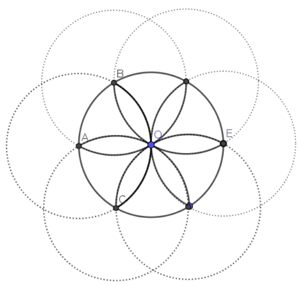
1. Figure symétrique faite de courbes inscrites dans un cercle.
2. Grand vitrail d'église, de forme circulaire.

On retiendra l'idée de symétrie, et le fait que les extrémités des pétales doivent être sur un cercle. Les rosaces que l'on considérera sont celles qui seront faciles à tracer au compas (et éventuellement à la règle), donc qui seront formées d'arcs de cercle. Attention, ce n'est en fait pas la rosace au sens mathématique du terme, qui n'est pas formée d'arcs de cercle. (Voir à la fin pour une définition précise).

Remarque : un certain nombre de constructions sont bien facilitées sous geogebra en utilisant le bouton « construire un cercle passant par 3 points » (en général ces trois points seront les deux extrémités de pétale voulues et le centre du cercle).

Rosace à 6 pétales

Commençons par la rosace à 6 pétales connue par la plupart des écoliers.



Rappelons le **principe de construction** : on trace un cercle de centre O ; à partir d'un point A du cercle on trace un arc de cercle de même rayon que le cercle initial (ce cercle passe donc par le point O). On obtient ainsi deux points d'intersection sur le cercle initial, B et C, et on recommence en prenant B comme nouveau centre de cercle, et ainsi de suite.

Au bout d'un moment, on retombe sur le point initial.

On obtient ainsi une rosace à 6 pétales.

Pourquoi cela marche :

On remarque que OA = OB (puisque A et B sont sur un même cercle de centre O).

De plus OA = AB (car B est sur le cercle de centre A et de rayon OA).

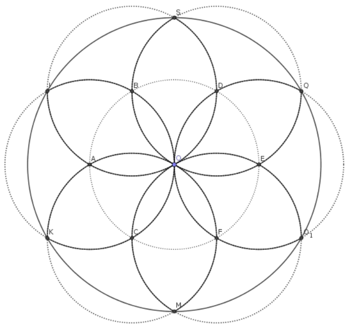
Ainsi le triangle OAB est équilatéral.

Par conséquent tous ses angles sont égaux et valent 60 degrés. En particulier, l'angle $\widehat{AOB}$ vaut 60 degrés. Cela sera le cas à chaque nouveau cercle qu'on trace. Au bout de 6 cercles, on obtient donc un point A' sur le cercle, tel que l'angle $\widehat{AOA'}$ vaut 360 degrés, c'est-à-dire que le point A' est bien le point A.

Pourquoi c'est « joli » : l'œil repère beaucoup de régularités, dues à de nombreuses symétries. En effet la figure admet la droite (OA) comme axe de symétrie (et de manière générale toutes les droites passant par O et l'un des centres des nouveaux cercles). Cela fournit ainsi 3 axes de symétrie. Mais il y en a d'autres : les perpendiculaires à ces droites (qui sont aussi les bissectrices de nos angles de 60 degrés, mais ne sont pas explicitement tracées sur le dessin) forment 3 axes de symétrie supplémentaires.

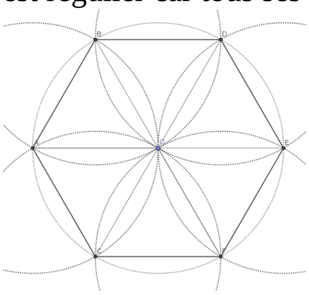
Pétales bien jointifs au centre, sans s'intersecter : en partant de A, au bout de 3 cercles, on arrive au point E tel que l'angle OAE vaut donc 180 degrés. O, A et E sont donc alignés : [A,E] est donc un diamètre du cercle initial. Ainsi les deux cercles de centre A et de centre E sont tangents en O, puisque la distance entre leurs centres est la somme de leurs rayons. On en déduit qu'ils n’ont qu’un seul point d’intersection, O, et les pétales sont donc bien jointifs.

Variante



On peut s’intéresser à ce qu’on obtient en dessinant les arcs de cercle jusqu’à leur intersection. Cela revient en fait à dessiner une rosace, mais pour laquelle les arcs de cercle ne relient pas un pétale sur deux, comme c’était le cas pour la première rosace, mais chaque pétale à son voisin. On obtient alors une rosace pour laquelle les pétales s’intersectent. La figure formée par ces intersections est justement la rosace décrite précédemment. Le même phénomène s’observera avec la rosace à 8 pétales.

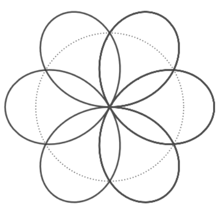
Autre figure à partir d’une construction analogue : **l’hexagone régulier** (hexagone = 6 côtés, il est régulier car tous ses côtés sont de même longueur et ses angles sont tous égaux).



Il est obtenu en traçant les segments reliant les sommets de chaque pétale.

Calculs d’aire : (ces calculs utilisent l’aire du disque notée *D* et du triangle équilatéral AOB notée *T*).
Aire de l’hexagone : *6T.*
L’aire du disque privé de l’hexagone correspond à l’aire de 6 demi-pétales de la première rosace.
On en déduit que l’aire d’un demi pétale est *D/6-T*, et enfin que l’aire de la première rosace formée de 6 pétales est *2D-12T*.
(Si le cercle de centre O a un rayon *R*, on a $D=\pi R^2$ et $T = \sqrt{3}/2 \, R^2$)

Remarque :



La rosace au sens mathématique n’est pas formée d’arcs de cercle : il s’agit d’une seule courbe (qui s'autointersecte).
Pour les curieux, son équation en coordonnées polaires est :

$$\rho=\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

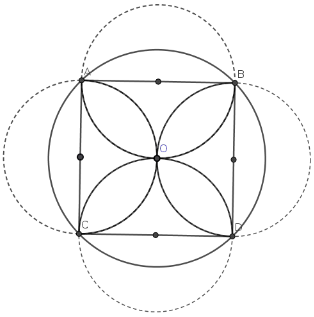
Mais pourquoi se limiter à 6 pétales ?

On peut facilement obtenir une rosace à 3 pétales, par exemple, en prenant un pétale sur 2 de la première rosace.

Remarque : pour une rosace à *n* pétales, l'angle entre deux pétales sera *2π/n*. On retrouve que pour une rosace à 6 pétales cet angle vaut 60 degrés, ce qui correspond aux angles d'un triangle équilatéral.

Rosace à 4 pétales

L'angle entre deux pétales consécutifs est donc de 90 degrés.



Notons A, B, C et D les extrémités des 4 pétales. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ étant de 90 degrés, A, O et C sont alignés, [AC] est donc un diamètre du cercle de centre O. De même pour [BD]. De plus ces deux diamètres sont perpendiculaires.

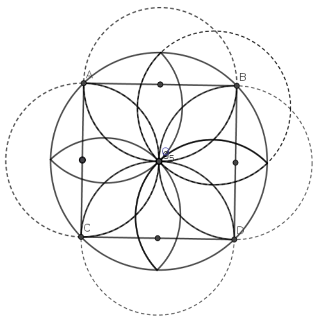
Remarque : ABCD est donc un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur, c'est donc un carré. Si on note R le rayon du cercle initial, on peut déterminer la longueur a du côté du carré ABCD. Puisque le triangle AOB est rectangle en O et isocèle (car A et B sont sur le cercle de centre O), on a $a^2 = 2R^2$, donc $a = \sqrt{2}R$.

Construction de cette rosace. Nous proposons 2 méthodes.
Méthode 1 : on commence par tracer le cercle de centre O, on prend un diamètre [AC], puis on construit le diamètre perpendiculaire [BD]. On doit ensuite tracer des cercles pour les pétales, le premier doit passer par les points A, O et B. Or le triangle AOB est rectangle en O et isocèle (car A et B sont sur le cercle de centre O). Le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de [AB]. On peut le construire à la règle (ou au compas).
Méthode 2 (plus courte, si on sait construire un carré) : on utilise la remarque. On commence par construire le carré ABCD. On peut alors si on le souhaite construire le point O à l'intersection des diagonales et le cercle de centre O et de rayon OA. On construit pour chaque côté le cercle dont le centre est le milieu du côté et qui passe par les sommets du carré (ainsi que par le centre du carré).

Symétries : il y a 4 axes de symétrie : les 2 diagonales du carré, et les 2 parallèles aux côtés passant par le centre du carré.
Là encore, les cercles utilisés pour les pétales sont tangents en O : les pétales ne s'intersectent pas.

Et pour 8 pétales ?

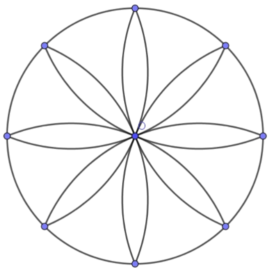
Deux pétales successifs feront un angle de 45 degrés.
Comment construire cette rosace ?



On peut superposer 2 rosaces à 4 pétales, l'une obtenue à partir de l'autre par une rotation de centre O de 45 degrés.
Concrètement, une fois la première rosace à 4 pétales construite, voyons comment obtenir la deuxième.
On peut commencer par obtenir les 4 sommets des pétales supplémentaires : ce sont les intersections du cercle initial de centre O, et des médiatrices des côtés du carré (ou encore

les droites reliant O aux centres des cercles utilisés pour les pétales de la première rosace). On peut alors construire le deuxième carré, et les milieux de ses côtés (qui sont les centres des nouveaux pétales).
On peut aussi commencer par remarquer que les centres des nouveaux pétales à construire sont situés sur les diagonales du premier carré ABCD. Ils sont à la même distance de O que les centres des premiers pétales, on peut donc tracer le cercle correspondant (de centre O et de diamètre le côté du carré ABCD). Les intersections de ce cercle avec les diagonales de ABCD sont les centres cherchés.

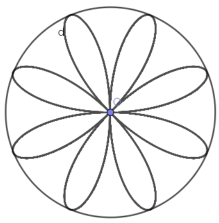
Sur cette rosace, les pétales s'intersectent.



On peut ne considérer que les 8 pétales intérieures de la rosace précédente, qui forment une rosace plus petite (dont les pétales ne s'intersectent pas) : le principe pour la construire directement, une fois les 8 points formant les extrémités des pétales placés, est de construire des arcs de cercle reliant non pas un pétale sur 2, mais un pétale sur 3. Avec un compas, on peut construire le centre du cercle circonscrit au triangle (isocèle) formé de deux extrémités de pétales et du centre du cercle en construisant l'intersection des médiatrices ; il suffit pour cela de construire les médiatrices des 8 rayons correspondant aux pétales.

Symétrie : les diamètres reliant deux extrémités de pétales forment 4 axes de symétrie, les bissectrices entre deux pétales successifs forment 4 axes supplémentaires.

Remarque :



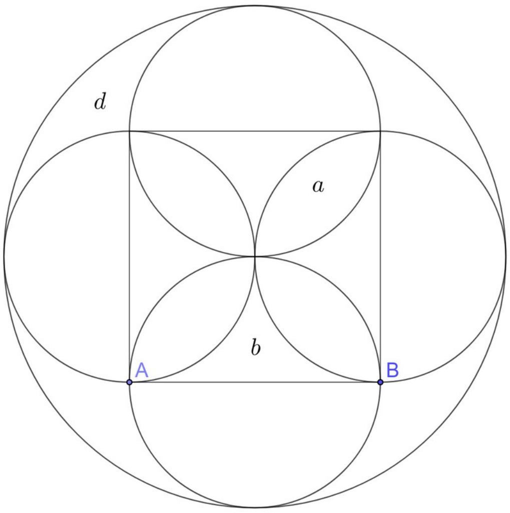
La rosace mathématique à 8 pétales est encore différente ; en particulier les bords des pétales sont arrondis.
Elle a pour équation en coordonnées polaires
$\rho = \sin(4\,\theta)$

Pour les curieux : de manière générale, une rosace mathématique a une équation en coordonnées polaires de la forme $\rho = \sin(k\,\theta)$, en prenant *k* rationnel si on veut une courbe fermée.
Si *k* est un entier impair elle aura *k* pétales, si *k* est pair elle en aura *2k*.
On obtient 6 pétales avec *k* = 3/2.

Que peut-on dire sur les aires pour la rosace à 4 pétales ?

Notons *c* le côté du carré ;
a l'aire d'un pétale à l'intérieur du carré ;
b l'aire de chacun des 4 morceaux du complémentaire du pétale dans le carré ;
d l'aire de chaque lunule extérieure au carré.

On va voir comment calculer *a* ; on observera en particulier que *a* = *d*, relation apparente sur le dessin de Léonard de Vinci qui nous a inspirés au départ.
Cette relation peut également se prouver sans calcul explicite des aires *a* et *d*.



L'aire du carré égale à c^2 est aussi égale à $4a + 4b$.
L'aire d'un des petits cercles de diamètre c égale à $\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$ est aussi égale à $4a + 2b$;
donc $4a + 4b = c^2$ et $4a + 2b = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{4}$.

En soustrayant ces deux égalités,
on trouve $2b = c^2 - \frac{\pi c^2}{4}$;
donc $b = \frac{c^2}{2} - \frac{\pi c^2}{8} = \frac{4c^2 - \pi c^2}{8} = \frac{c^2(4-\pi)}{8}$;
comme $4a + 4b = c^2$, alors $a + b = \frac{c^2}{4}$,
finalement : $a = \frac{c^2}{4} - b = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2(4-\pi)}{8} = \frac{2c^2 - c^2(4-\pi)}{8} = \frac{c^2(\pi-2)}{8}$.
Le rayon du grand cercle est le diamètre des petits cercles, soit le côté c du carré.
L'aire du grand cercle de rayon c, égale à πc^2 est aussi égale à :

l'aire du carré + 2 fois l'aire du petit cercle + $4d$, soit $c^2 + 2\frac{\pi c^2}{4} + 4d = \pi c^2$;
d'où $4d = \pi c^2 - \left(c^2 + \frac{\pi c^2}{2}\right) = \frac{2\pi c^2 - 2c^2 - \pi c^2}{2} = \frac{\pi c^2 - 2c^2}{2} = \frac{c^2(\pi-2)}{2}$ et $d = \frac{c^2(\pi-2)}{8}$.
Ainsi $a = d$.

Autre preuve, sans calcul de *a* et *d* :
Notons x l'aire d'un petit cercle, y l'aire du grand cercle.
Le rayon du grand cercle est le double du rayon du petit, donc $y = 4x$. *(*)*
De plus, l'aire du grand cercle est égale à $y = 4x+4d - 4a$ (**)
(c'est l'équivalent de la formule Card (A∪B) = Card A + Card B – Card (A∩B). On peut se convaincre facilement sur le dessin que quand on ajoute les aires des petits cercles on compte deux fois l'aire des intersections)
De (*) et (**) on obtient directement $a = d$.
Si on ne veut faire qu'ajouter des aires de domaines disjoints, et ne pas écrire directement la formule (**), il faut faire intervenir b.
On obtient alors d'une part
$y = 4d+4(x/2) + 4a+4b$,
et d'autre part
$x=4a+2b$, c'est-à-dire $4b=2x-4a$. On retrouve alors la relation (**).

Avantage de cette preuve : "c" n'intervient pas, et on n'a pas besoin de connaître l'aire d'un cercle.
Inconvénients : on n'obtient pas de formule explicite pour a, b, d.
Si on doit obtenir la formule (**) par le deuxième calcul, on se retrouve en fait avec plus de lettres que par la première méthode.

Pour simplifier la première preuve on suggère de supposer c=1.

Références.

http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Polygone/Rosace.htm
http://www.reseau-wallon-garges.ac-versailles.fr/IMG/pdf/activites_a_partir_de_la_rosace.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/Rosace_(math%C3%A9matiques)

Description de l’activité en 6ème

A la découverte de la géométrie de Léonard de Vinci AP 6ème nov 2020

Séance 1 *1h en demi-groupes*

1 - Qui était Léonard de Vinci ? Que savez vous sur lui ?

Ils parlent tous des machines volantes, certains de la Joconde ou de l’homme de Vitruve (qui se trouve dans leur livre de maths). Aucun ne sait qu’il était aussi mathématicien.

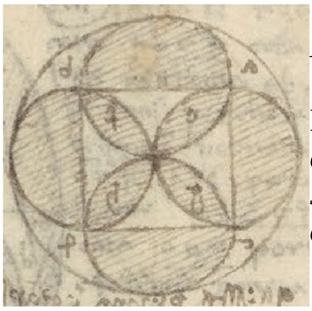
- Quand a-t-il vécu ?
Ils ne savent pas, certains pensent au XVIII ème siècle…

- Distribution de la fiche de Marc Moyon :
On lit le texte d’introduction sur Léonard de Vinci, et je projette le verso de la page 471 du Codex atlanticus (voir *https://www.codex-atlanticus.it/#/*)

Un élève est allé au château d’Amboise,

On observe les figures, je leur parle de l’écriture à l’envers et on retrouve facilement la figure de la fiche sur la page.

2 - Étude de la figure :



Les élèves voient une rosace .

Est-ce une rosace habituelle ? *Il n’est pas immédiat de voir que non et qu’elle n’a que 4 pétales au lieu de 6 habituellement.*
Je trace une rosace « normale » au tableau et on parle d’hexagone et de carré.

Lorsque je leur demande de chercher les différents éléments de la figure, personne ne repasse en couleur bien que ce soit noté sur la fiche.

On trouve les cercles et le carré.

Difficultés rencontrées : *trouver le rapport entre ces différents éléments :*
- *Où sont les centres des petits cercles ?*
- *Où est celui du grand ?*
- *Quel rapport entre les petits et le grand cercle ?*
- *Certains voient des demi-cercles à l’extérieur du carré sans rapport avec la rosace(sans doute à cause des hachures)*
- *Beaucoup de problèmes de vocabulaire (milieu, centre, diamètre, rayon...) alors qu’on vient de finir la leçon sur le cercle.*

3 – Reproduction de la figure :

Plusieurs démarches :
- Démarrage par le carré qui pose des problèmes car le plus souvent le carré n'est pas droit donc cela ne fonctionne pas pour la suite.
- Certains tentent de placer le carré et le grand cercle avant de tracer les petits.
- Ceux qui démarrent par les cercles s'en sortent mieux. Le plus efficace est de partir du grand cercle avec deux diamètres perpendiculaires.
- Il y en a encore qui veulent partir d'une rosace « normale » et effacer 2 pétales. Il faut le refaire au tableau pour bien voir que cela donne un rectangle et non un carré.

- L'absence de mesures les gêne, certains ont besoin d'en mettre une pour le côté du carré.

- Beaucoup arrivent rapidement à quelque chose d'approximatif qui les satisfait, le manque de précision ne les gêne pas, ni le fait que les pétales de la rosace n'aient pas toutes la même taille...

3 - Quand ils ont terminé la figure, je leur demande de commencer à écrire leur démarche. Quelques uns le font , d'autre n'ont pas fini, voire pas commencé…

Un élève me demande de mettre la page du codex sur pronote pour tracer d'autres figures.

Séance 2 : *1h (idem demi classe en AP)* Bilan et formalisation de la démarche, programme de construction.

Première classe :
Lecture et critique de leurs textes tous ensemble :

Bilan très laborieux, les textes utilisent le vocabulaire n'importe comment (cercle/rond, centre/milieu/moitié, côté/segment/droite/trait…) alors qu'on vient de finir la leçon et de corriger le contrôle sur le vocabulaire…

J'explique qu'on doit écrire un programme de construction, donc une consigne pour tracer la figure.
Peu de changement pour la majorité...
Un élève donne des noms aux points pour écrire un texte précis.

On arrive finalement à un programme (enfin surtout moi) ou plutôt deux versions :
une qui commence par le carré
une autre par le grand cercle et deux diamètres perpendiculaires.

Deuxième classe :

Bilan un peu plus facile, mais mêmes problèmes que les précédents avec leurs textes.
Plusieurs élèves donnent spontanément des noms aux points.
Davantage d'élèves ont préféré se donner des dimensions (je n'avais pas donné de consignes à ce sujet).

On lit plusieurs textes et j'essaie de tracer la figure au fur et à mesure de façon à ce qu'ils trouvent eux même ce qu'il faut préciser.

Exemples de programmes de construction écrits par les élèves : on voit le mot « milieu » à la place du mot « centre » ; il est rare que les cercles soient décrits de façon assez précise pour les tracer (en général juste un point). Certains programmes de construction mettent l'accent sur l’obtention d’un carré à la fin. D’autres donnent comme étape « construire une rosace à 4 pétales » sans plus de détails sur la manière de la tracer.

Tracer un carré et 4 cercles de milieu le milieu d’un côté du carré. Et tracer un cercle de milieu le milieu du carré.

a) Tracer un carré (peu importent ses dimensions)
b) Placer ses milieux, tracer une rosace à 4 pétales
c) Tracer des arcs de cercle sur les 4 côtés du carré
d) Tracer un cercle autour de la figure

J’ai fait un cercle de 6 cm. J’ai tracé un diamètre puis j’ai fait 4 petits cercles à l’intérieur du grand cercle de 3 cm ; là ou se croisent les cercles j’ai tracé un carré.
(sur le dessin, le carré (plutôt un parallélogramme) est bien repassé en noir, il semble être effectivement l’aboutissement du dessin)

Tracer un cercle de 20 cm de diamètre. Puis tracez deux droites perpendiculaires qui partent du milieu du cercle. Tracez le milieu de la perpendiculaire. Considérez le milieu des droites comme le milieu des cercles que vous devez tracer maintenant. Effacez votre perpendiculaire et reliez les points de la rosace pour faire un carré.

Faire un carré de 6 cm A, B, C, D. Et mettre les points de centre [AB], [BC], [CD], [DA] E, F, G, H en leur milieu. Et faire des cercles de centre H, E, F, G et de rayon 3 cm. Et faire un 2eme cercle de centre Z de rayon 6 cm.
(Lettres présentes sur le dessin)

1. Fais un cercle de 6 cm de rayon
2. Fais 4 cercles de 3 cm au milieu du rayon de 6 cm
3. Fais un carré à partir du centre des 4 cercles

Tracer un carré de côté 4 cm (ou autre), mettez des points sur chaque côté du carré (le milieu des côté) tracer une rosace à 4 pétales, après gardez le même rayon et tracez des demi-cercles sur chaque côté. Ensuite mettez votre compas sur le milieu de la rosace et tracer un cercle de 4cm de rayon, et voilà !

On arrive finalement à écrire deux versions :

1 . Trace un carré de 10 cm de côté.
Prends le milieu des côtés et trace les cercles de centre ces milieux et de rayon 5 cm.
Trace un cercle de centre le centre du carré et de rayon 10 cm.

Dans le second groupe, le texte dont on est parti comporte des noms de points que l’on a laissé en rajoutant d’effacer les noms des points à la fin .
Cela permet de voir que c’est plus facile avec les noms des points pour écrire les consignes.

2. Tracer un cercle de rayon 10 cm avec deux diamètres perpendiculaires.
Placer les milieux des 4 rayons obtenus.
Tracer ensuite les cercles de centre ces milieux et de rayon 5 cm.
Ils forment une rosace à 4 pétales, tracer le carré dont les sommets sont les extrémités des pétales de la rosace (ou bien les points d’intersection des cercles).
Effacer les deux diamètres de départ.

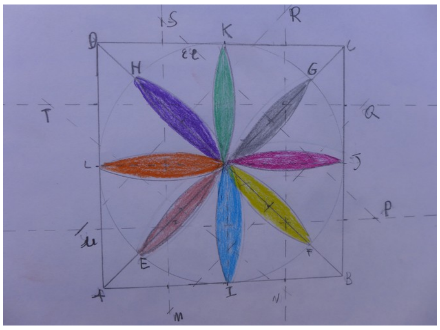
Dans chacun des groupes je leur fais remarquer que le texte 1 est plus court mais plus délicat à réaliser à cause du tracé du carré qui n'est pas évident.

Ensuite avec un seul des groupes, j'ai eu le temps de donner une autre construction possible débutant par un segment et sa médiatrice pour obtenir les centres des 4 petits cercles, c'est une fiche que j'ai retrouvée et qui correspondait au début du tracé d'un motif arabo-andalou de Grenade.
3. Tracer un cercle de rayon 5 cm et un de ses diamètres [AB]
Tracer la médiatrice du segment [AB]. On note C et D ses points d'intersection avec le cercle.
Construire les cercles de centre A, B, C et D de rayon 5 cm. Ils forment une rosace à 4 pétales.

Ils avaient ensuite pour consigne de faire la rosace a 8 pétales chez eux.

Séance 3 (1h) Analyse des rosaces des élèves, début de l'écriture du programme de construction pour la rosace à 8 branches
Analyse très laborieuse, les élèves ne se souviennent pas comment ils ont fait, il faut sur chaque figure retrouver avec eux les centres des arcs de cercles, cela prend du temps.

Certains élèves qui n'avaient pas compris la méthode de construction de la figure en classe ont cherché sur internet et trouvé une construction de la rosace fine centrale à 8 branches, faite à partir de carrés avec les médiatrices des côtés et des diagonales. Ils ne se sont pas rendu compte du fait que s'ils avaient tracé les cercles en entier, cela aurait donné la bonne figure.



Cette séance à duré presque une heure, à l'issue de laquelle je leur ai demandé d'écrire un programme de construction : certains avaient commencé en classe, d'autre l'avaient à faire entièrement à la maison.

Séance 4 (1h) : Travail sur les programmes de construction pour la rosace à 8 pétales :
Ils avaient eu la consigne pour cette séance d'écrire un programme de construction permettant de tracer la rosace à 8 pétales en entier. (Certains avaient commencé en classe, d'autres l'avaient à faire entièrement à la maison.)
Nous avions déjà rédigé un programme de construction de la rosace à 4 pétales à partir de la figure de Léonard de Vinci, donc le problème était de rédiger la méthode pour placer la deuxième rosace correctement à partir de la première.
Ils pouvaient donc débuter le programme par : « Construire une rosace à 4 pétales »

Des volontaires lisent leur texte et on voit ce qui va ou non et pourquoi. De nombreux élèves n'avaient rien écrit, voire avaient refait la figure...

Maya *: Prendre les sommets du carré et tracer 1 cercle de rayon équivalent à la distance du sommet du carré au centre du cercle.*

Maya trace des arcs de cercles de centres les sommets du carré qui passent par le centre, c'est effectivement ce qu'elle avait fait sur sa figure que l'on avait pourtant corrigée.

Thomas *: Tracer les cercles de centre E ; F ; G ; H au croisement des médiatrices et du cercle.*

Je n’ai pas réussi à savoir si E ; F ; G ; H étaient des points ou les noms des cercles, pour lui c'était pareil et ça ne posait pas de problème vu qu’il se comprenait…

On sent chez certains de réels efforts pour être précis, les étapes sont souvent numérotées, des lettres sont utilisées…

Elorri : *Tracer un cercle* C *(de rayon 3 cm) et tracer une droite passant par le milieu du cercle.*
Construire avec le compas la médiatrice du diamètre [AB] qu’on appelle [CD].
Tracer les 2 autres diagonales et tracer le quadrilatère ABCD.
Positionner le compas sur le point d’intersection du cercle et de la médiatrice et des diagonales puis tracer tous les arcs de cercles.
Ici, Elorri n’est pas partie de la rosace à 4 pétales déjà tracée, elle repart du début, mais son texte une fois corrigé, permet de construire la figure entière. Elle a compris la construction.

Rudy :

1. *Tracer un carré (6 cm de côté)*
2. *A partir du milieu de chaque côté tracer un cercle de rayon 3 cm*
3. *Tracer les diagonales du carré*
4. *Tracer 4 cercles passant par le centre du carré et dont le centre d’origine est sur la diagonale à l’intersection avec le cercle inscrit.*
5. *Prendre l’intersection des premiers cercles tracés et des suivants pour tracer mon losange.*

Max :
1. Tracer un carré de 8 cm (C1)
2. Tracer ses diagonales et ses médiatrices
3. Prendre un compas écarté de 4 cm, placez-le à l’intersection des médiatrices avec les côtés du carré C1, puis tracer la rosace à 4 pétales (en changeant de médiatrice après avoir fait l’arc de cercle).
4. Sur les diagonales du carré C1, en partant du milieu de carré en comptant 4 cm vers les branches du carré.
5. Après avoir fait des marques sur toutes les branches tracer un carré dont les côtés sont perpendiculaires aux diagonales (4 cm de chaque coté des diagonales)
6. Après avoir fait ce carré faire une rosace à 4 pétales.

Finalement on arrive à un texte correct à partir de celui d’Ellori dans un groupe, et induit par moi dans l’autre.

Texte 1 :
Tracer un cercle C avec un diamètre [AB]. Construire au compas la médiatrice du diamètre [AB], on obtient un diamètre perpendiculaire que l’on nomme [CD].
Tracer le carré ABCD et les médiatrices de ses côtés.
Tracer les arcs de cercle de centre les points d’intersection du cercle C avec les diagonales puis avec les médiatrices du carré ABCD qui passent par le centre de C pour former les pétales de la rosace.

Texte 2 :
Tracer une rosace à 4 pétales (texte rédigé précédemment).
Tracer les diagonales et les médiatrices du carré et le cercle qui passe par ses sommets. Ce cercle coupe les médiatrices en 4 points qui sont les sommets d’un deuxième carré. Le tracer puis construire une seconde rosace à 4 pétales à l’intérieur en procédant comme pour la première.

Bilan de cette dernière étape.
Les élèves ont moins bien adhéré à cette étape, autant ils étaient contents de chercher comment construire la rosace et de le faire, autant analyser leurs erreurs ne les a pas intéressés et rédiger le texte non plus… Leur manque de motivation et la difficulté du travail ont fait que de nombreux élèves n'avaient rien écrit.

Description rapide d'une variance de ces 4 premières séances dans un autre collège :
Ces séances avaient lieu en co-intervention avec un autre collègue de mathématiques lors d'une heure hebdomadaire intitulée AP (Aide Personnalisée).

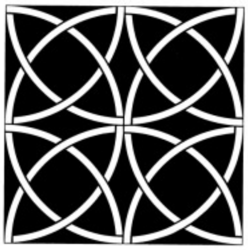
Séance 1 :En amont de la visite des deux intervenants du musée, nous avons travaillé sur divers motifs géométriques à commencer par la figure issue du manuscrit de Léonard de Vinci avec comme seule consigne de la reproduire, sans plus de précision afin de laisser aux élèves le choix de la stratégie de construction, et en particulier la chronologie (*quid du carré ou du grand cercle ?*)

Séance 2 : le demi-groupe d'élèves qui avaient pu rédiger un programme de construction de leur figure a été accompagné en salle informatique pour la réaliser grâce à Geogebra tandis que l'autre partie de la classe avait besoin de travailler à nouveau la construction puis a assisté à une présentation par l'enseignant de l'interface de Geogebra en ligne visant à se familiariser avec l'environnement d'un logiciel de géométrie dynamique.

Séance 3 : chacun des élèves de la moitié de la classe qui avait déjà découvert seul devant leur écran le logiciel était en charge de tutorer un camarade réalisant pour la première fois cette rosace à 4 branches.

Séance 4 : en travail à faire, pour la séance suivante, d'autres motifs choisis dans les livres « *La Géométrie pour le plaisir* » avaient permis de maintenir un intérêt pour la construction géométrique et en lui apportant le soin nécessaire à sa réalisation puis son éventuelle mise en couleur comme dans ces exemples proposés.





Programme de construction pour la rosace à 8 pétales utilisé dans cette classe :
Tracer une rosace à 4 pétales (inscrite dans un cercle de rayon 10cm)
Tracer les diagonales du carré, et le cercle de rayon 5 cm de centre O; il coupe les diagonales en 4 points qui seront les centres des nouveaux cercles de rayon 5 cm.

Une fois ce travail de construction fait, il a pu être exploité pour donner lieu soit à de simples dessins (première classe de 6ème, où les conditions matérielles n'ont pas permis une exploitation plus complète), soit pour le décor d'une assiette (2ème classe). Nous présentons quelques exemples de productions d'élèves à différents stades en annexe.

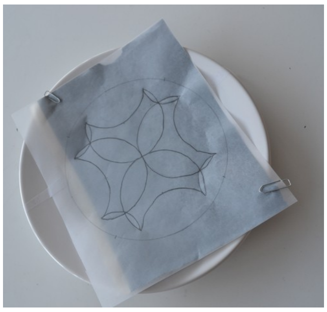
Séance 5 : *Choisir une figure parmi toutes celles déjà réalisées dans le cadre du cours de mathématiques (nombreux exemples accrochés au mur ou dans votre cahier).*
Reproduire cette figure sur une feuille A4 blanche dans un cercle de diamètre 15 cm.
Personnaliser en imaginant les couleurs que vous allez mettre.

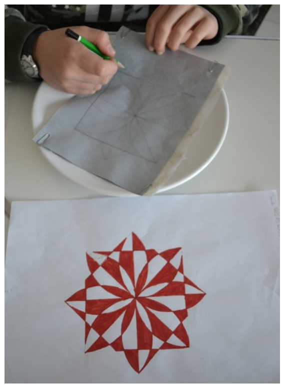
Quelques mois plus tard, il était alors demandé aux élèves de choisir parmi toutes les réalisations d'en prendre une qui serait le motif de leur assiette avec comme seule contrainte de la construire avec les instruments sur papier calque et dans un cercle de diamètre 15 cm pour correspondre au bassin de l'assiette en porcelaine fournie. Ils pouvaient prendre celle de leur choix, voire s'inspirer les uns des autres car nous avions échangé entre collègues et mutualisé les productions.

Les productions des élèves étaient aussi confiées aux enseignantes d'Arts Plastiques afin d'anticiper les besoins lors du changement d'instrument en passant du crayon à papier au pinceau mais également de réfléchir à une mise en couleur quitte à faire des essais préalables de peintures sur la feuille A4 de papier blanc durant leur cours. Ainsi un lien se faisait et des allers-retours avaient lieu.

Séance 6 (2h) Décor des assiettes.
Alors qu'il était prévu de nous rendre au musée, en raison du contexte sanitaire, ce sont deux intervenants qui nous ont rendu visite au collège pour être devant les élèves durant 2 heures pour chacune des 4 classes (environ 28 élèves par division). Si pendant la 1ère heure, ils présentaient le musée (son histoire et les techniques de fabrication comme le moulage, le modelage etc.), ils nous ont proposé de passer à la réalisation proprement dite en fournissant une assiette par élève, le papier carbone pour reporter la construction individuelle depuis le calque déjà prêt (initialement prévu pour décalquer une décoration existante sur une pièce du musée, ce qui n'était pas notre cas) et les peintures dans des godets de couleur ; les élèves avaient porté les pinceaux fins et leur construction. Les collègues d'Arts Plastiques ont eu l'occasion de se joindre à nous durant cette heure pour aider à la mise en place du calque et du papier carbone sur l'assiette (trombone et ruban adhésif), mais aussi pour conseiller lors du report à main levée des contours du dessin sur la surface creuse (cette manipulation a un peu frustré les élèves car, en plus d'être nouvelle et d'être réalisée comme à l'aveugle sous le carbone, ils perdaient la précision apportée grâce à la règle et au compas) puis au maniement du pinceau comme au choix des couleurs et décors qui pouvaient agrémenter et personnaliser la création. Il suffisait de laisser sécher ces peintures qui ne nécessitaient pas de cuisson.

Étape 1 Reproduction des contours du dessin sur l'assiette (papier calque et carbone)





Étape 2. Peinture


Si l'on aurait peut-être pu craindre des œuvres peu expressives, l'examen des assiettes obtenues montre que les élèves savent fort bien s'emparer de leur production mathématique en laissant libre cours a leur imagination.

Bilan : *L'activité menée ainsi sur plusieurs mois a rencontré l'adhésion des classes puisque tous ont pu entrer dans la tâche et la mener à son terme. De plus, elle a offert la possibilité de se réaliser, d'entreprendre quelque chose de plaisant et de beau, prendre le temps de parvenir à son objectif en faisant preuve de persévérance, d'évoluer sous les regards croisés des enseignants et de leur enseignements. Autre levier motivant : une sélection des plus belles assiettes a été exposées en fin d'année scolaire au musée.*

Quelques mots sur la séquence en CM2 *(testée dans 2 classes)*

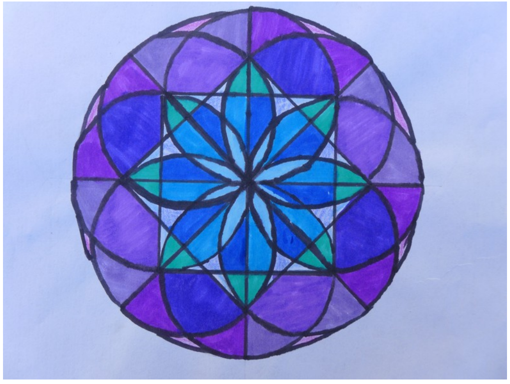
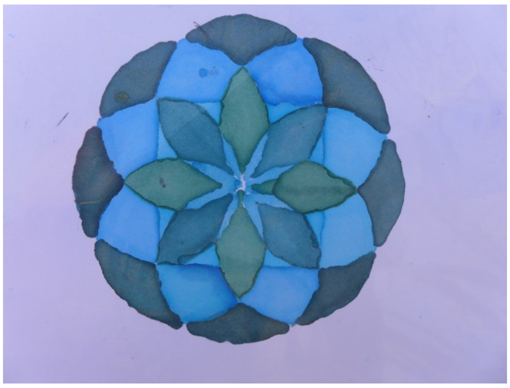
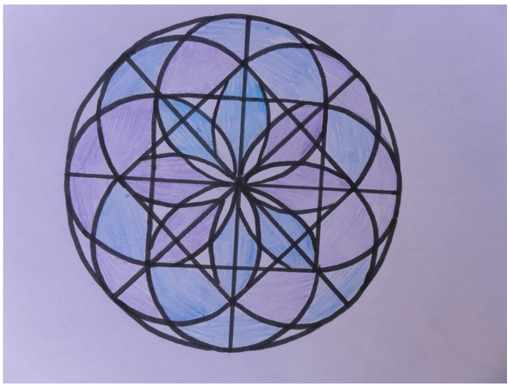
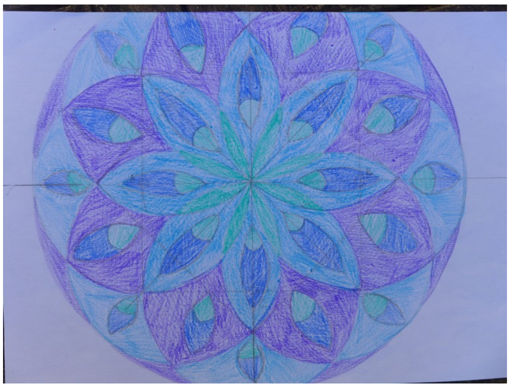
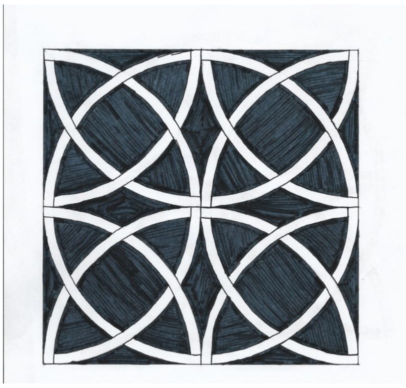
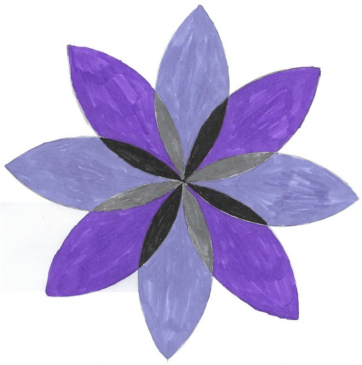
L'activité s'inscrivait dans le cadre du dispositif Regards de Géomètres.
Deux membres du groupe (une enseignante-chercheuse, une enseignante de collège qui avait fait la première partie de l'activité avec ses élèves) sont allées voir l'une des classes lorsqu'ils avaient déjà tous travaillé sur les rosaces, et avaient tous des dessins, qu'ils allaient mettre sur assiette à la fin de la semaine.
Nous leur avons projeté des œuvres des élèves de 6ème, qui les ont beaucoup intéressés. Nous les avons commentées en parlant de symétries, en leur expliquant que cela contribuait à l'harmonie d'une figure, mais que trop de symétrie pouvait aussi être ennuyeux. Ils ont cherché les symétries sur leurs propres dessins : c'était le concours pour celui qui en avait le plus (ou le moins!).
Nous leur avons montré la page du Codex Atlanticus de Léonard de Vinci, qui les a assez fascinés, une élève s'est lancée (avec succès!) dans la reproduction de certaines figures.
Enfin, pour une première sensibilisation à un travail d'élaboration de programme de construction, nous avons lancé Geogebra (qu'ils ne connaissaient pas) en demandant de décrire les opérations.
Intérêt : la règle du jeu (bien préciser ce qu'on doit tracer) est facilement compréhensible.
Inconvénients : travail commun en classe, pas forcément facile à gérer.
Geogebra rend compliqué le fait de ne garder que les traits « intéressants » à la fin (il faut redéfinir des arcs de cercle au lieu de cercle, etc)

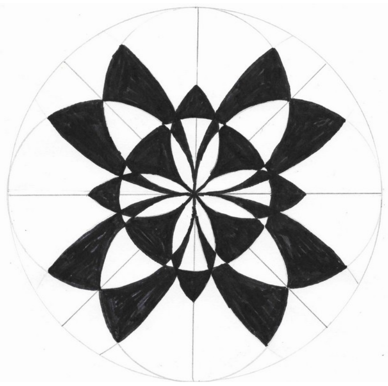
Le musée de Samadet ne pouvant plus recevoir de public pour raisons sanitaires, il s'est déplacé dans les écoles.

Deux médiateurs sont ainsi venus dans la classe de CE2 de l'école Saint Joseph d'Aire sur l'Adour.
Après une présentation du musée et une démonstration de modelage d'assiette, les élèves ont pu peindre leur motif géométrique sur une assiette.
Chaque élève avait décalqué son dessin pour pouvoir le transférer sur son assiette grâce à du papier carbone.

Puis nous avons peint notre motif : papier journal sur la table, une fleur avec de la peinture dans chaque pétale et un verre d'eau pour deux élèves.
Il y avait quatre adultes dans la classe pour 25 élèves de CE2.
Cet atelier a duré une heure. Les assiettes sont justes décoratives et le rendu dépend de chaque élève.

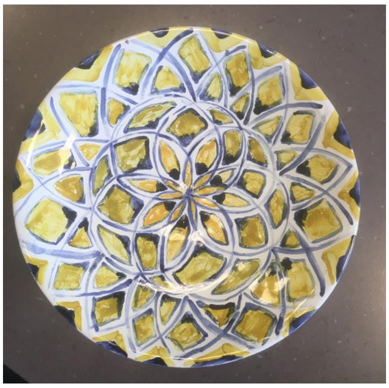
Œuvres d'élèves.

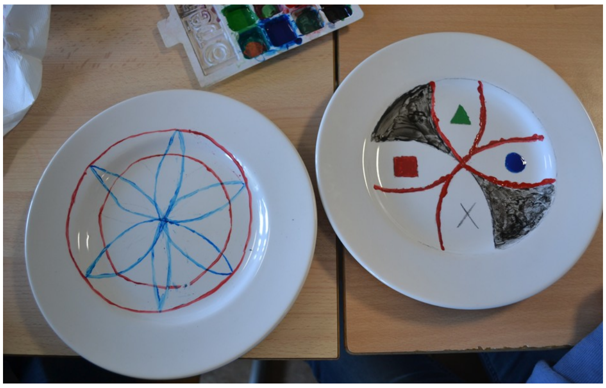



Quelques assiettes

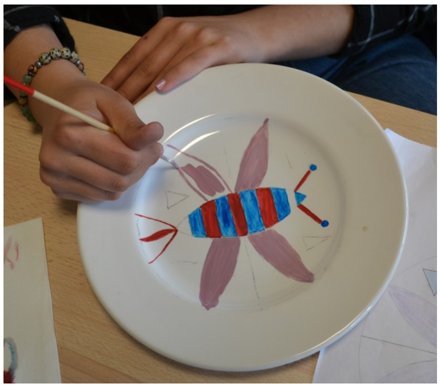
Assiette réalisée par une enseignante



Assiettes d'une classe de 6ème







Classe de CM2



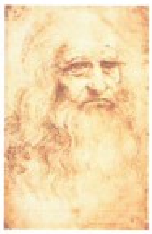


Fiche élève (tirée de *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3, par Marc Moyon et Dominique Tournès)*

À LA DÉCOUVERTE DE LA GÉOMÉTRIE DE *Léonard de Vinci*

Si tu ne connais pas *Leonardo da Vinci*, voici quelques informations qui accompagnent son autoportrait...

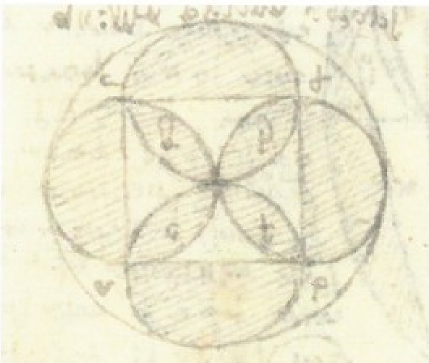
Léonard est né en 1452 à Vinci (petite ville d'Italie) et meurt à Amboise (France) en 1519. Il travaille à la cour de riches et importants princes comme Ludovic Sforza à Milan ou François I[er] en France. Il est un des plus célèbres savants de la Renaissance grâce à ses oeuvres d'art (peintures et sculptures), ses croquis d'anatomie et de botanique, ou encore pour ses multiples inventions sans que l'on sache s'il les a vraiment réalisées. Léonard peut encore être considéré comme un mathématicien. Il a d'ailleurs eu l'occasion de travailler avec Luca Pacioli, un autre mathématicien important, pour lequel il a dessiné des figures géométriques. Malheureusement, les travaux de Léonard ne sont pas si faciles à lire car il écrivait de manière inversée de droite à gauche et en miroir !



Bib. Royale de Turin

En visitant la grande bibliothèque Ambrosienne de Milan (Italie), on peut trouver un vieux et très important livre de travaux de Léonard de Vinci. Ce livre s'appelle le *Codex atlanticus* en rapport avec ses grandes dimensions ($64,5 \times 43,5cm$) - deux fois plus grand qu'un grand cahier qu'un collégien utilise aujourd'hui.

Au dos de la feuille 471, on découvre de nombreuses constructions géométriques que l'ingénieur et artiste italien a lui-même tracées.



Extrait de *« De ludo geometrico » : la matematica e la geometria di Leonardo*, De Agostini, 2013.

Étude de la figure

Observe cette figure avec beaucoup d'attention. Pour cela, tu peux repérer les figures élémentaires et les nommer. Si besoin, tu peux repasser leur contour en couleur.

Reproduction de la figure

Construis-la à l'aide des instruments adaptés.

Écriture d'un texte de construction

Raconte les différentes étapes de cette construction.