La géométrie dans l'espace en spécialité de terminale

La principale difficulté de l'approche de ces notions en terminale tient au fait que les élèves n'ont quasiment pas fait de géométrie dans l'Espace depuis le collège. A cela vient se greffer le fait que les élèves ne maîtrisent pas du tout les techniques de résolution des systèmes, ce qui peut parfois les déstabiliser.
Dans un premier temps, Il nous a donc paru indispensable de rappeler ce qu'on appelle les solides usuels et leur volume, de travailler des notions de base comme la définition d'un plan et d'appréhender la position relative de droites et de plans en dehors de tout repère.
Nous avons choisi d'adopter le découpage suivant , les trois parties n'étant évidemment pas faites successivement, elles sont réparties sur l'année dans le cadre d'une progression spiralée.
Ce travail s'appuie sur celui du groupe Manuels de lycée de l'IREM de l'Université Paris Cité.

1. **Position relative dans l'espace**
    - Droites, plans.
    - Position relative : droites et plans.

    Patron ;
    Solide ;
    Représentation en perspective cavalière (*) ;
    Différence entre face et plan ;
    Si deux points d'une droite appartiennent à un plan tout point de cette droite appartient au plan.

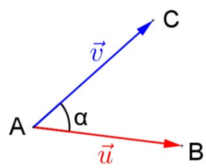
(*) la représentation en perspective cavalière des solides usuels et la mise en relation avec un patron sont des attendus de fin de 5e.

2. **Géométrie vectorielle: vecteurs de l'espace.**
    - Base de l'espace, décomposition d'un vecteur dans une base.
    - Repérage, coordonnées (*)
    - colinéarité et coplanarité
    - Vecteur directeur, représentations paramétriques d'une droite

(*) le vocabulaire abscisse, ordonnée, altitude est un attendu de fin de 4e avec un repère dans un pavé droit.

3. **Produit scalaire**
    - Orthogonalité
    - Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace (*)
    - Vecteur normal d'un point sur une droite, sur un plan.
    - Intersection de droites et de plans.
    - Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan, distance d'un point à une droite, à un plan (**)

(*) la notion d'angle orientée n'étant plus au programme de 1re, on pensera à utiliser comme en 1re une notation du type $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\alpha)$



(**) le projeté orthogonal d'un point sur une droite du plan est au programme de seconde. Il est revu en première dans le cadre de l'étude du produit scalaire.

Ce document présente quelques idées pour enseigner la partie 1.

Il faut éviter autant que possible que cette leçon ne deviennent une simple litanie de propriétés et de définitions que les élèves s'empresseront d'oublier.

Nous abordons ce chapitre à l'aide de la situation « Positions relatives dans l'Espace » donnée en annexe 1. Nous présentons deux versions de cette situation : une où l'on donne le patron et l'autre où l'on donne la perspective cavalière du même solide.
Avec la deuxième version, les élèves ont l'occasion de manipuler et de confronter les divers patrons possibles.
Les deux premières questions peuvent être faites en amont à la maison.

Cette situation permet de faire émerger les définitions générales :

- Qu'est- ce qu'un plan ?
- Qu'est-ce que la coplanarité ?
- Comment étudier les positions relatives ?

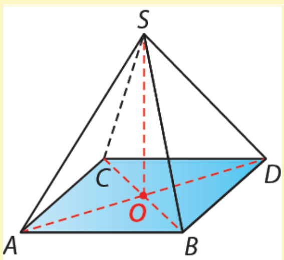
Elle offre l'occasion de faire un point cours après la question 4) , à cet effet, une fiche est proposée en annexe 2 suivie d'une autre fiche sur les solides usuels.
Ces deux fiches nous servent de cours.

Il ne s'agit en aucun cas d'approfondir davantage ce travail, la détermination de sections est certes intéressante mais hors programme. La durée accordée à cette partie ne doit pas excéder 4 à 6 heures.

A titre indicatif, voilà quelques exercices type que nous proposons aux élèves, ils sont tirés du manuel Déclic (TS).

Exercice 1 QCM

SABDC est une pyramide à base carrée *ABDC*, dont le centre de la base est le point *O*.
Pour chaque question, donner **la** bonne réponse.



1 Les plans (SAD) et (SBC) sont sécants selon :
a. le point S. **b.** le segment $[SO]$. **c.** la droite (SO).

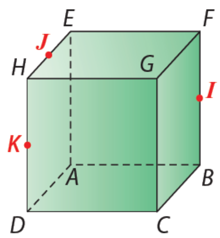
2 Les plans (SOC) et (SBD) sont sécants selon :
a. le point S. **b.** la droite (SB). **c.** la droite (BC).

3 Les plans (SAB) et (SDC) sont sécants selon :
a. le point S. **b.** le plan (ABC).
c. une droite passant par S.

Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments $[BF]$, $[EH]$ et $[HD]$. Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés :

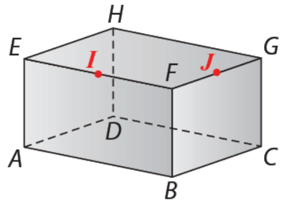
a. les droites (DG) et (EA) ;
b. les droites (JK) et (FC) ;
c. le plan (EFC) et la droite (JK) ;
d. les plans (EKG) et (AIC) ;
e. le plan (BCK) et la droite (EI) ;
f. les plans (GHK) et (AIC) ;
g. le plan (AIC) et la droite (FG) ;
h. les droites (FK) et (BD).



Conseil Pour bien voir un plan défini par trois points dans l'espace, il est souvent utile d'en voir quatre.
Par exemple, le plan (EFC) est le plan $(EFCD)$.

Exercice 3

Dans le pavé droit *ABCDEFGH* ci-dessous, les points I et J sont les milieux des segments $[EF]$ et $[FG]$.

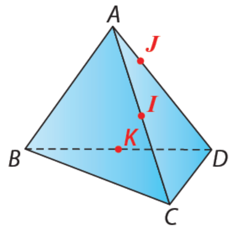


1 Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

2 Déterminer l'intersection des plans (BIJ) et (ABC).

Exercice 4

Dans le tétraèdre *ABCD* ci-contre, I est le milieu de $[AC]$, J est un point de $[AD]$ et K est le milieu de $[BD]$. Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés.



a. les droites (IJ) et (AB) ;

b. les droites (IK) et (AB) ;

c. le plan (BIJ) et la droite (AK) ;

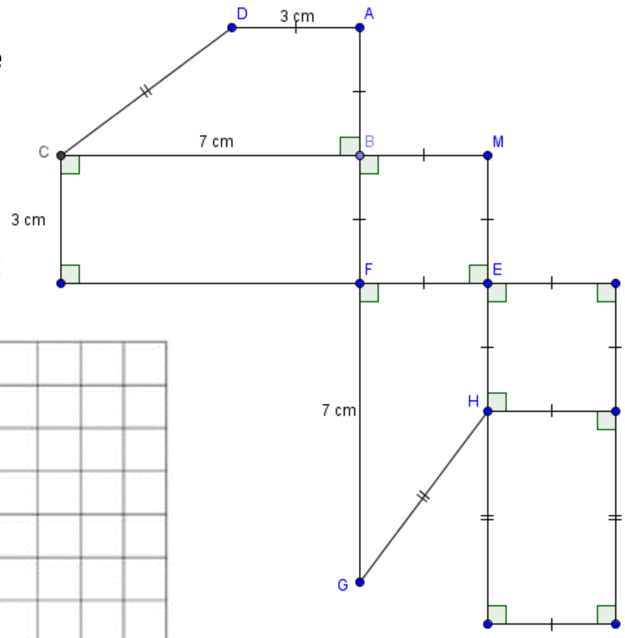
d. les plans (BIJ) et (AKD) ;

e. le plan (BIK) et la droite (CD) ;

f. les plans (BIJ) et (AKC).

Annexe 1

Fiche élève version 1 **Positions relatives dans l'espace**



1. Construire ce patron en vraie grandeur et former le solide.

2. a. Citer deux faces parallèles de ce solide.

b. Quelle est la nature du solide ?

c. Représenter ce solide en perspective cavalière en plaçant l'observateur devant la face ABCD.

Les questions suivantes portent sur le solide, et non pas sur le patron.

3. a. Hachurer sur la représentation en perspective la face EADH.

b. On note I le milieu de [EH] et A' le symétrique du point A par rapport au point D.
Les points I et A' appartiennent-il à la face EADH ?

4. Les trois points E, A et D n'étant pas alignés, ils définissent un unique plan, noté par exemple (EAD).

a. Citer deux droites parallèles permettant de définir le plan (EAD).

b. Citer deux droites sécantes permettant de définir le plan (EAD).

c. Citer des points du plan (EAD).

d. Vrai ou faux ?

(1) La droite (AH) est contenue dans le plan (EAD).

(2) On peut noter indifféremment (EAD) ou (ADH) puisqu'il s'agit du même plan.

(3) Le plan (EAD) peut être aussi défini par les trois points E, I et H.

(4) Les plans (EAD) et (BCG) sont parallèles.

5. Dans chaque cas, dire si les droites sont parallèles, sécantes ou ni l'un ni l'autre :

a. (AB) et (EF)

b. (AB) et (CD)

c. (EH) et (BC)

d. (EF) et (CD)

6. Quelles autres positions relatives entre deux objets de l'espace peut-on étudier ? Inventer d'autres questions pour les aborder.

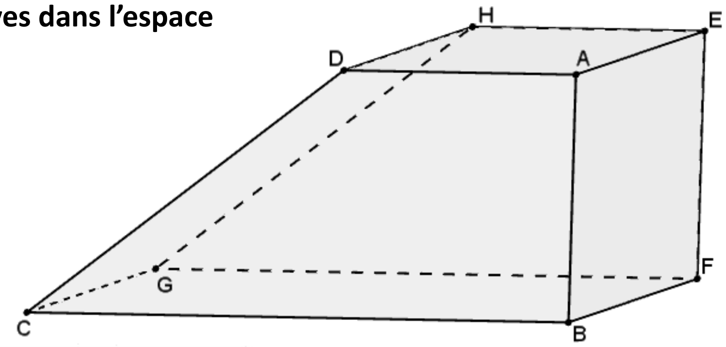
Fiche élève version 2

Positions relatives dans l'espace

On considère le solide ci-contre dans lequel :
ABFE et ADHE sont des carrés de côté 3 cm,
BCGF un rectangle tel que BC = 7 cm
et les faces ADHE et BCGF sont parallèles.

1. Quelle est la nature du solide ?

2. Dessiner un patron de ce solide.



Les questions suivantes portent sur le solide, et non pas sur le patron.

3. a. Hachurer sur la représentation en perspective la face EADH.

b. On note I le milieu de [EH] et A' le symétrique du point A par rapport au point D.
Les points I et A' appartiennent-il à la face EADH ?

4. Les trois points E, A et D n'étant pas alignés, ils définissent un unique plan, noté par exemple (EAD).

- **a.** Citer deux droites parallèles permettant de définir le plan (EAD).
- **b.** Citer deux droites sécantes permettant de définir le plan (EAD).
- **c.** Citer des points du plan (EAD).
- **d.** Vrai ou faux ?
  - (1) La droite (AH) est contenue dans le plan (EAD).
  - (2) On peut noter indifféremment (EAD) ou (ADH) puisqu'il s'agit du même plan.
  - (3) Le plan (EAD) peut être aussi défini par les trois points E, I et H.
  - (4) Les plans (EAD) et (BCG) sont parallèles.

5. Dans chaque cas, dire si les droites sont parallèles, sécantes ou ni l'un ni l'autre :

- **a.** (AB) et (EF)
- **b.** (AB) et (CD)
- **c.** (EH) et (BC)
- **d.** (EF) et (CD)

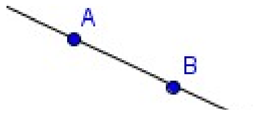
6. Quelles autres positions relatives entre deux objets de l'espace peut-on étudier ? Inventer d'autres questions pour les aborder.

Annexe 2 **Positions relatives dans l'espace**

1. Objets de l'espace

a. Droites

► Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite



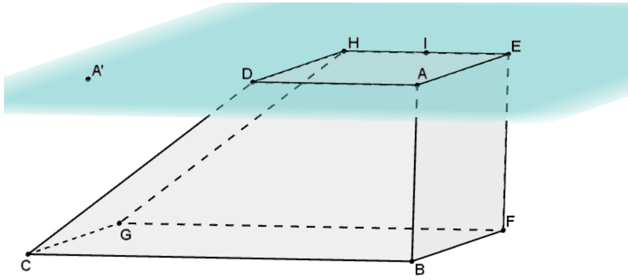
b. Plans

► Par trois points non alignés A, B, et C de l'espace, il passe un unique plan, noté (ABC).

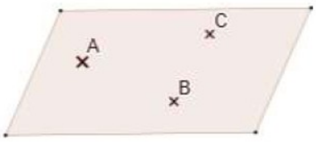
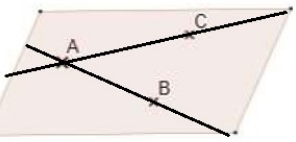
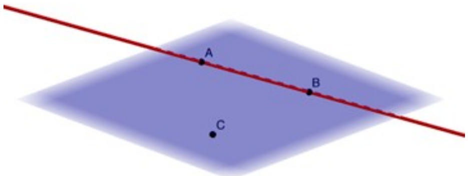
Exemple

Dans le solide ci-contre, on peut définir un plan contenant la face ADHE.

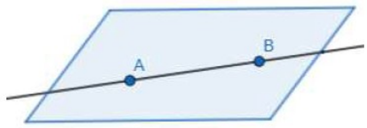
On peut le nommer le plan (EAD) ou encore (ADH)...



► Pour définir un unique plan, il suffit de :

3 points non alignés 	2 droites sécantes 
1 droite et 1 point n'appartenant pas à cette droite 	2 droites strictement parallèles 

► Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan (P), alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan (P).
La droite (AB) est contenue dans le plan (P) et on peut noter (AB) $\subset$ (P).



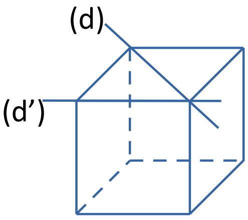
2. Positions relatives de deux droites

Définition. Deux **droites** de l'espace sont **coplanaires** lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

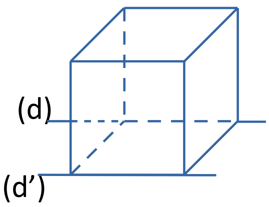
Propriétés

Deux droites de l'espace sont :

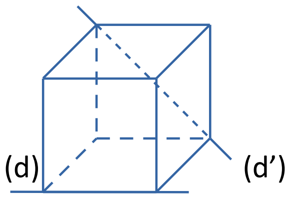
- soit **coplanaires** et **sécantes**,



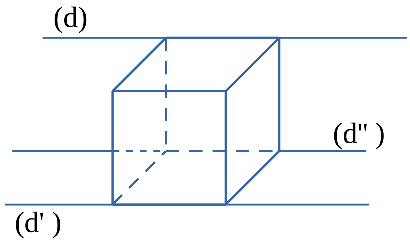
- soit **coplanaires** et **parallèles** (strictement parallèles ou confondues)



- soit **non coplanaires**,



Si deux droites (d) et (d') sont parallèles à une même droite (d''), alors elles sont parallèles entre elles.

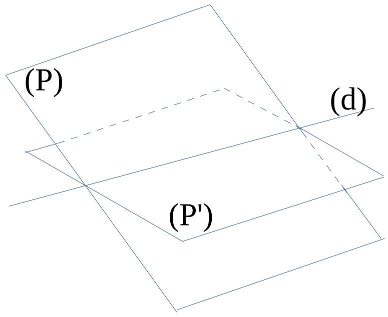


3. Positions relatives de deux plans

Définition : Soit (P) et (P') deux plans distincts de l'espace.
(P) et (P') sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

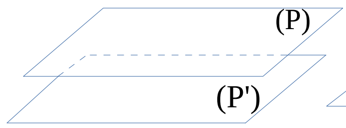
Propriétés Deux plans de l'espace sont donc :

- soit **sécants** suivant une droite

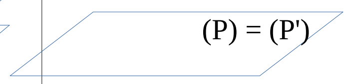


(P) et (P') ont une droite d'intersection (d).
$(P) \cap (P') = (d)$.

- soit **parallèles**

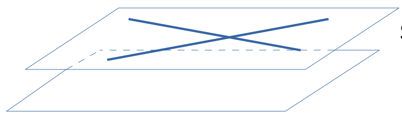


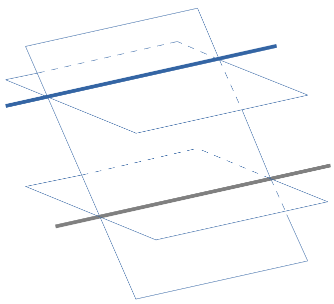
(P) et (P') sont strictement parallèles.
$(P) \cap (P') = \emptyset$.



(P) et (P') sont confondus.
$(P) \cap (P') = (P) = (P')$.

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.





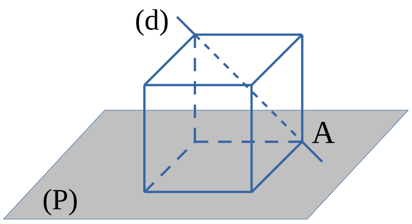
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

4. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition. Une droite (d) non incluse dans un plan (P) est parallèle à (P) si et seulement si (d) et (P) n'ont aucun point commun.

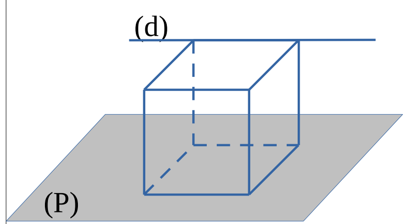
Propriétés Une droite (d) et un plan (P) sont :

- soit **sécants**,

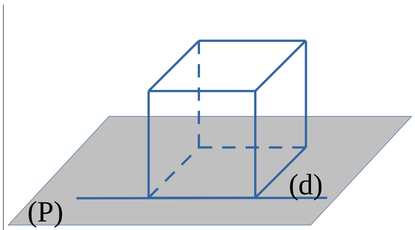


(d) et (P) ont un point d'intersection A.
$(d) \cap (P) = \{A\}$.

- soit **parallèles**

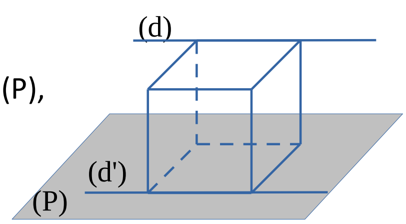


(d) et (P) sont strictement parallèles.
$(d) \cap (P) = \emptyset$.



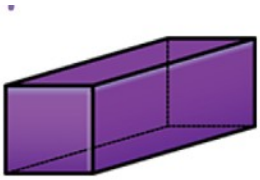
(d) est contenue dans (P).
$(d) \cap (P) = (d)$.

Si une droite (d) est parallèle à une droite (d') contenue dans un plan (P), alors la droite (d) est parallèle au plan (P).



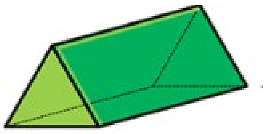
Les solides usuels

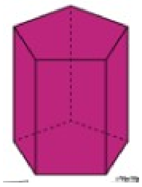
Un **parallélépipède rectangle, ou pavé droit**, est un solide dont toutes les faces sont rectangulaires.
Remarque : Si toutes les faces sont des carrés, on appelle ce solide, un cube



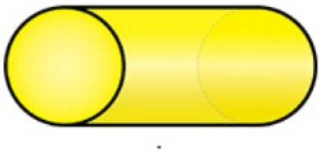
Si on note, L, l et h les dimensions de ce pavé droit, alors son volume V est : **V=L×l×h**.
Dans le cas d'un cube de côté c, on a donc **V =c×c×c=c³**

Un **prisme droit** est un solide qui possède :
– deux polygones superposables pour faces parallèles, appelées bases ;
– des rectangles pour toutes les autres faces, appelées faces latérales.



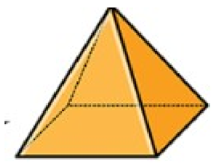


Un **cylindre** est un solide délimité par deux bases qui sont deux disques parallèles et superposables et une surface latérale courbe.

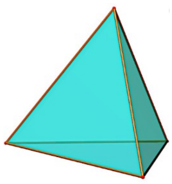


Le volume V d'un prisme ou d'un cylindre est donné par la formule : **V =B×h** où B est l'aire de la base et h la hauteur du solide (i.e la distance entre les deux bases).

Une **pyramide** est un solide possédant une base polygonale et dont les surfaces latérales sont des triangles. Ces faces ont toutes un sommet commun appelé le sommet de la pyramide.
Une pyramide est dite **régulière** lorsque sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, …) et ses faces latérales sont des triangles isocèles superposables.
Un **tétraèdre** est une pyramide à base triangulaire



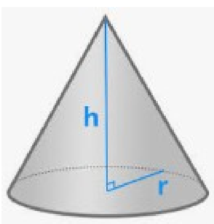
pyramide à base carrée



tétraèdre

Le volume V d'une pyramide est donné par la formule suivante : $V=\frac{B\times h}{3}$ où B est l'aire de la base et h la hauteur du solide.

Cette formule reste valable pour le cône.



$$V=\frac{\pi r^2\times h}{3}$$

Et pour la boule : $V=\frac{4}{3}\pi\times r^3$