Bases d'exercices à destination des enseignants du secondaire

Exercices de calcul de probabilités - Lois Normales - Lois Binomiales

IREM Bordeaux - groupe Probabilités et Statistique - 2013

... ces exercices ne sont pas à destination des élèves

Calcul direct

Remarque de vocabulaire : On devrait toujours parler d'espérance d'une variable aléatoire mais par abus de langage on peut trouver dans ce document le terme de moyenne.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(8, 4^2)$. Calculer

$$P(6 < X < 10),\ P(X < 7.52),\ P(X > 8.48),\ P_{(X>5)}(X > 6).$$

Exercices de base pour apprendre l'usage des calculatrices. Avec les calculatrices TI on utilise normalFRép*(valeur inf, valeur sup, moyenne, écart-type). Avec les Casio, on utilise le menu Ncd. Voir descriptif détaillé page 13 du document ressource.*

$P(6 < X < 10) = 0.383$ *immédiat avec la machine.*

Pour $P(X < 7.52)$*, deux stratégies possibles, calculer* $P(-10^{99} < X < 7.52)$ *qui donne une très bonne approximation ou bien* $P(X < 7.52) = P(X \leq 8) - P(7.52 \leq X \leq 8) = 0.5 - P(7.52 \leq X \leq 8)$*. La solution donne 0.452.*

Même esprit pour un calcul direct de $P(X > 8.48)$*, on peut aussi remarquer avec la symétrie que* $P(X > 8.48) = P(X < 7.52) = 0.452$.

$P_{(X>5)}(X > 6) = 0.894$, *ré-investissement des probabilités conditionnelles, amené à faire le calcul de* $P(X > 5)$ *et* $P(X > 6)$ *selon le même principe que ci-dessus puisque 5 et 6 sont inférieurs à 8.*

Exercice 2. Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variabilité du diamètre réel de chaque bille et l'erreur produite est modélisée par une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0 mm et d'écart-type 0.015 mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7.98 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8.02 mm.

(1) Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée ?

(2) Lorsque la bille est trop petite elle est rejetée, lorsqu'elle est trop grande elle est retaillée convenablement (elle ne sera pas écartée après avoir été retaillée). Le coût de fabrication d'une bille est de 1 euro et le surcoût pour retailler une bille est de 30 centimes d'euros.
Soit C la variable aléatoire coût de fabrication d'une bille, déterminer la loi de C.

(3) Soit B la variable aléatoire bénéfice réalisé pour une bille prise au hasard (parmi toutes les billes produites). Déterminer la loi de B pour un prix de vente d'une bille de x euros (on remarquera que B ne peut prendre que les trois valeurs : -1 ; $x-1.3$; $x-1$).

(4) Déterminer x tel que $E(B)=0$.

(5) Interpréter le résultat.

Réinvestissement des variables aléatoires, exercice "approfondissement".
Remarque : l'erreur d'usinage est ici à comprendre comme une erreur algébrique pouvant donc prendre des valeurs négatives.

(1) Difficulté potentielle : faire le lien entre E et le test pour écarter une bille.
$P(\{E<-0.02\}\cup\{E>0.02\})=1-P(-0.02\leq E\leq 0.02)\simeq 0.18$
(2) C (coût exprimé en euros) peut prendre les valeurs 1 ou 1.3.
$P(C=1.3)=P(E>0.02)\simeq 0.09$
$P(C=1)=1-P(C=1.3)\simeq 0.91$
(3) $P(B=-1)=P(E<-0.02)\simeq 0.09$, $P(B=x-1.3)=P(E>0.02)\simeq 0.09$, $P(B=x-1)=P(-0.02\leq E\leq 0.02)\simeq 0.82$.
(4) $E(B)$ est le bénéfice moyen par bille,

$$E(B)\simeq(-1)\times 0.09+(x-1.3)\times 0.09+(x-1)\times 0.82=0.91x-1.021$$

Ce bénéfice moyen par bille s'annule pour un prix de vente "x" de 1 euro 13 centimes.
(5) C'est à partir d'un prix de vente de 1 euro 13 centimes que l'entreprise peut commencer à faire des bénéfices.

Exercice 3. Dans une population, la taille des hommes exprimée en centimètres, peut être représentée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 175 cm et d'écart-type $\sigma=6$ cm.
1) Trouver la probabilité p que la taille d'un homme quelconque de cette population soit supérieure à 170 cm et inférieure à 180 cm.
2) Trouver la probabilité que la taille d'un homme quelconque de cette population soit inférieure à 170 cm ou supérieure à 180 cm.
3) On appelle N le nombre aléatoire d'hommes dont la taille est comprise entre 170 cm et 180 cm sur cinq hommes tirés au hasard dans la population.
3.a) Quelle est la loi de N (justifiez votre réponse) ?
3.b) Trouver la probabilité que N soit supérieur ou égal à 1.

1) Calcul direct, $p = P(170 \leq T \leq 180) \simeq 0.595$. *L'intitulé du sujet peut faire penser (à tort) à décomposer l'écriture de l'évènement "*$(T > 170) \cap (T < 180)$*" mais sa probabilité n'est pas le produit des probas de* $(T > 170)$ *et de* $(T < 180)$ *car ce sont deux évènements non indépendants.*
2) Evénement contraire, $1 - p$.
3.a) Dans l'énoncé, le schéma de Bernoulli est implicite, ce qui sous-entend que la population est de taille "infinie" pour pouvoir assimiler cette expérience à un tirage avec remise (l'argument "5 est négligeable devant la taille de la population" est aussi valable).
Comme N *compte les "succès",* N *suit une loi binomiale* $B(5, p)$ *où* p *est défini à la question 1).*
3.b) $P(N \geq 1) = 1 - P(N < 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - p)^5 \simeq 0.99$ *(calcul direct ou avec TI* binomFdp*(n,p,k)).*

Calcul direct et calcul avec quantiles

Exercice 4. L'âge d'obtention d'un diplôme est supposé être normalement distribué avec une moyenne de 23.1 ans et un écart-type de 1.1 an.
a) Déterminer la proportion de diplômés âgés de 22 à 23 ans.
b) Déterminer l'âge x tel que 90 % des diplômés soient âgés de moins de x.
c) Proposer une rédaction compatible avec les programmes de Terminale en termes de vocabulaire de probabilité-statistique (population, probabilité d'un évènement pour un individu tiré au hasard,....)

Exercice d'application immédiate après retraduction en terme de variable aléatoire.
Une retraduction de cet exercice est que la variable aléatoire âge d'obtention d'un diplôme, notée A, suit une loi $N(23.1, (1.1)^2)$.
a) Ici, il est sous-entendu que la "proportion" dans la population correspond à la probabilité $P(22 \leq A \leq 23) \simeq 0.305$. Il y a donc confusion possible avec la proportion observée dans un échantillon. En toute rigueur, l'intitulé du sujet aurait dû demander un calcul de probabilité. Le calcul donne un résultat d'environ 30.5%.
b) On cherche x tel que $P(A \leq x) = 0.9$, c'est un calcul de quantile. Avec la TI (voir document ressource pour les autres outils), on utilise FracNormale*(proba, moyenne, écart-type) soit ici $x \simeq 24.5$.*

Exercice 5. On suppose que l'erreur E sur le poids mesuré par une balance est aléatoire, et suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type s.

(1) Déterminer une valeur approchée de s si on sait que l'erreur est en valeur absolue supérieure à 0.1 gramme dans 9% des cas.
(2) Quelle est alors la probabilité pour que l'erreur (en valeur absolue) soit supérieure à 0.2 gramme ?
(3) Déterminer le seuil E_0 tel que la probabilité pour que l'erreur soit en valeur absolue supérieure à E_0 soit de 5%.

C'est un exercice faisant appel à des calculs de quantiles et de probabilités d'une loi normale. (1) L'énoncé nous dit que $P(|E| \geq 0.1) = 0.09$. L'écart type s étant inconnu, on ne peut pas utiliser directement la calculatrice et on est obligé ici de réduire (variable déjà centrée).

$Z = \frac{E}{s}$ suit une loi $N(0,1)$ et on cherche s tel que $P(|Z| \geq \frac{0.1}{s}) = 0.09$. On transforme pour isoler le calcul de quantiles (disponible par exemple avec la commande FracNormale *de TI) :*
$P(Z < \frac{0.1}{s}) = 1 - P(Z \geq \frac{0.1}{s}) = 1 - \frac{1}{2}P(|Z| \geq \frac{0.1}{s})$.
On note x=0.1/s. On cherche donc ici x tel que $P(Z < x) = 0.955$ soit $x \simeq 1.695$ et $s = \frac{0.1}{x} \simeq 0.059$.
(2) calcul direct maintenant que s est connu : 0.0007.
(3) $P(|E| \geq E_0) = 0.05$ équivaut, par symétrie, à $P(E \geq E_0) = 0.025$ puis avec l'événement contraire $P(E < E_0) = 0.975$ soit $E_0 \simeq 0.116$.
Vérification de la cohérence du résultat : $5 < 9$ et $0.0116 > 0.01$, résultat cohérent avec (1).

Exercice 6. Un laboratoire fabrique des gélules dont la teneur en acide ascorbique est comprise entre 499 mg et 501 mg dans 98 % des cas. On suppose que cette teneur suit une loi normale d'espérance 500 mg.

(1) Déterminer l'écart-type de cette loi.

(2) Quel est le pourcentage de gélules contenant entre 499.5 et 500.5 mg d'acide ascorbique ?

(3) Entre quelles valeurs (centrées autour de la moyenne) va-t-on trouver 95 % des gélules ?

On sous-entend que "dans 98% des cas" est bien compris comme un calcul de probabilité d'un évènement mesuré sur un tirage au hasard d'une gélule dans une population infinie de gélules produites par l'entreprise.
(1) On note s l'écart-type de la loi normale et T la teneur (en mg) d'acide ascorbique d'une gélule prise au hasard, $P(\frac{499-500}{s} \leq \frac{T-500}{s} \leq \frac{501-500}{s}) = 0.98$.
Si Z désigne une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$ alors $P(Z \leq \frac{1}{s}) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq \frac{1}{s}) = 0.5 + \frac{1}{2}0.98 = 0.99$ donc en notant $x = 1/s$ on cherche x tel que $P(Z \leq x) = 0.99$. On trouve $x \simeq 2.326$ soit $s \simeq 0.43$.
(2) Calcul direct avec la calculatrice : 0.755.
(3) Si 95% des gélules sont entre $500 - t$ et $500 + t$, c'est que $P(|T - 500| > t) = 0.05$ donc par symétrie $P(T - 500 \leq t) = 1 - (0.05/2) = 0.975$ et sachant que T-500 suit une loi $N(0, s)$, on cherche x tel que $P(Z \leq x) = 0.975$ où Z suit une loi $N(0,1)$ soit $x = 1.96$ et on calcule $t/s = x$, soit $t = 1.96s = 0.843$.
L'intervalle est donc $[499.16; 500.8]$

Exercice 7. Une machine fabrique des écrous dont le diamètre intérieur est compris entre 4.99 cm et 5.01 cm dans 98% des cas. On suppose que ce diamètre suit une loi normale de moyenne 5 cm. Quel est le pourcentage d'écrous dont le diamètre est compris entre 4.995 cm et 5.005 cm ?

Travail de calcul de l'écart type d'une loi Normale $N(5, s^2)$, notée T sachant que $P(T \in [4.99; 5.01]) = 0.98$.
La condition devient $P(4.99 \leq T \leq 5.01) = P(|T - 5| \leq 0.01) = 2\ P(0 \leq T - 5 \leq 0.01)$
$= 2(P(T - 5 \leq 0.01) - 0.5) = 0.98$ soit $P(T - 5 \leq 0.01) = 0.99$, et, puisque T suit une loi $N(5, s^2)$, en centrant et réduisant, on cherche s qui vérifie $P(Z < 0.01/s) = 0.99$. La valeur $x = 0.01/s$ est donc un quantile d'une loi normale N(0,1), on trouve $x = 2.326$ et donc $s = 0.0043$.
La probabilité qu'un écrou pris au hasard ait un diamètre compris entre 4.995cm et 5.005cm peut se calculer directement avec la calculatrice : on trouve 0.755.

Exercice 8. Un magasin de vêtements décide, au cours d'une campagne promotionnelle, d'accorder une remise aux clients dont le montant des achats est suffisamment élevé. On note Y la variable aléatoire correspondant au montant total des achats en euros d'un client choisi au hasard. On suppose que Y suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart-type 32.
Calculer la probabilité de l'événement : « le montant des achats du client choisi est de 87 euros au plus ».
Calculer la probabilité de l'événement : « le montant des achats du client choisi est compris entre 40 euros et 138 euros ». Le fabricant souhaite que 60% de ses clients profitent de la remise. À quel montant doit-il fixer le seuil d'achats pour avoir droit à la remise ?

$P(Y \leq 87) = 0.646$,
$P(40 \leq Y \leq 138) = 0.838$
Enfin, on cherche x le seuil d'achat défini par $P(Y \geq x) = 0.6$ soit $P(Y \leq x) = 0.4$. On trouve $x = 66.9$.

Exercice 9. Lors d'un tir, on admet que les longueurs aléatoires de tir suivent une loi normale. On constate en ayant effectué un grand nombre de tirs que 10% des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km et 25% à une distance inférieure à 1,4 km. Calculer la moyenne et l'écart-type de la loi normale suivie par les longueurs de tir.

A noter que l'on utilise dans cet énoncé que la fréquence de réalisation d'un événement tend vers la probabilité de réalisation de cet événement lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire (Loi des grands nombres).
On appelle L la variable aléatoire longueur d'un tir, elle suit une loi normale de moyenne m et variance s^2 à déterminer.

Les deux informations de l'énoncé sont $P(L \geq 1.6) = 0.1$ et $P(L \leq 1.4) = 0.25$. Les calculs de quantiles directs avec les calculatrices (FracNormale avec TI, menu stat/dist/NORM/InvN avec Casio, voir document ressource page 13) ne peuvent pas être utilisés car on ne connait pas moyenne et écart type. Nous sommes donc amenés à centrer et réduire. On note Z une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$, on doit chercher a et b tels que

$$P(Z \geq a) = 0.1, \quad P(Z \leq b) = 0.25 \;\Leftrightarrow\; P(Z < a) = 0.9, \quad P(Z \leq b) = 0.25$$

Avec la calculatrice, $a \simeq 1.28$, $b \simeq -0.67$.
On termine en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{1.6-m}{s} = a \\ \frac{1.4-m}{s} = b \end{cases}$$

On trouve $m = 1.468$ et $s = 0.103$

Exercice 10. Le pH de l'urine d'un adulte sain se modélise comme une variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(6.25, (0.36)^2)$. Déterminer un intervalle, centré autour de la moyenne, où se trouve la mesure du pH urinaire pour 75% des adultes sains.

Si on note X la variable aléatoire mesure du pH urinaire, on doit résoudre $P(|\frac{X-6.25}{0.36}| \leq x) = 0.75$ avec $Z = \frac{X-6.25}{0.36}$ variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$. x vérifie donc $P(|Z| \leq x) = 0.75 \Leftrightarrow P(Z \leq x) = 1-0.25/2$. La calculatrice donne $x = 1.15$. Ainsi l'intervalle recherché est $[6.25 - 0.36x; 6.25 + 0.36x] = [5.84; 6.66]$ car $P(-x \leq Z \leq x) = P(6.25 - 0.36x \leq X \leq 6.25 + 0.36x)$.

Exercice 11. 1) Soit N une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
a) Pour $r > 0$, exprimer $P(-r \leq N \leq r)$ en fonction de $P(N \leq r)$.
b) Déterminer x tel que $P(|N| \geq x) = 0.01$.

Une entreprise fabrique des rouleaux de papier peint, leur largeur est exprimée en centimètres. Un rouleau de papier peint est considéré comme « acceptable »pour la largeur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[52.95, 53.05]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée d'une machine, associe sa largeur.
2) Après un réglage de la machine, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 53 et de variance 0.0016. Donner les valeurs a et b telles que $\dfrac{X-a}{b}$ suive une loi normale centrée réduite.
3) Calculer la probabilité qu'un rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée de la machine soit acceptable pour la largeur.
4) Le résultat obtenu avec ce réglage est jugé insuffisant et on décide de modifier la variance avec un

nouveau réglage de la machine. X suit maintenant une loi normale de moyenne 53 et de variance inconnue σ^2.
Déterminer σ pour que $P(52.95 \leq X \leq 53.05) = 0.99$.

Par symétrie, $P(-r \leq N \leq r) = 2P(0 \leq N \leq r)$. De plus $P(N \leq r) = 0.5 + P(0 \leq N \leq r)$; on en déduit $P(-r \leq N \leq r) = 2P(N \leq r) - 1$.
On cherche x tel que $P(|N| < x) = 0.99$, soit $P(N < x) = (1 + 0.99)/2$. On trouve avec la calculatrice $x \simeq 2.58$.
$Y = \frac{(X-53)}{\sqrt{0.0016}}$ suit une loi normale centrée réduite.
On cherche donc $P(52.95 \leq X \leq 53.05) = P(-\frac{5}{4} \leq Y \leq \frac{5}{4})$. Avec la calculatrice on obtient 0.79.
Le passage à une loi normale centrée réduite n'était pas nécessaire ici.
$Z = \frac{(X-53)}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite. σ étant inconnu, on doit passer par Z :
on veut $P(52.95 \leq X \leq 53.05) = P(-0.05/\sigma \leq Z \leq 0.05/\sigma) = 0.99$.
La première question fournit alors $\frac{0.05}{\sigma} \simeq 2.58$ soit $\sigma \simeq 0.02$.
Cohérence du résultat : on vérifie bien que cet écart-type est inférieur à l'écart-type du réglage initial.

Exercice 12. On considère un lot de tubes à essais. A chaque tube, on associe 2 variables aléatoires notées D et H ; D représente son diamètre et H sa hauteur en mm. On suppose que :
- D suit la loi normale de moyenne $\mu_D = 19,7$ et d'écart-type $\sigma_D = 0,4$
- H suit la loi normale de moyenne $\mu_H = 200$ et d'écart-type $\sigma_H = 6$.

On suppose que les variables aléatoires D et H sont indépendantes. Ce qui signifie que pour tout intervalle I et J de $\mathbb{R}$

$$P\left((D \in I) \cap (H \in J)\right) = P(D \in I) \times P(H \in J).$$

1) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre d'au moins 20 mm.
2) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait une hauteur supérieure à 190 mm et inférieure à 210 mm.
3) En raison des contraintes d'expérience, un tube ne sera utilisable que si son diamètre est supérieur à 20 mm et sa hauteur appartient à l'intervalle $[190; 210]$.
On note p la probabilité que le tube soit utilisable, calculer p.
On considère maintenant un lot de 100 tubes à essais, on suppose que les tubes à essais du lot sont utilisables ou non indépendamment les uns des autres. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre de tubes utilisables parmi les 100 choisis.
4) Quelle est la loi de S ? Justifier votre réponse.

5) Donner l'espérance et la variance de S en fonction de p.
6) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 25 tubes utilisables parmi les 100 choisis.

La difficulté de cet exercice réside dans le calcul de p, l'élève de terminale a tous les outils pour mais on sollicite ici des connaissances de différents chapitres, ceci de plus avec un énoncé assez long et la nécessité de traduire mathématiquement les données.
1-2) Travail de calcul direct sur la loi normale pour déterminer $P(D \geq 20)$ et $P(190 \leq H \leq 210)$: on trouve respectivement 0.23 et 0.90
3) Utilisation de l'indépendance pour obtenir p

$$p = P\left((D \geq 20) \cap (190 \leq H \leq 210)\right) = P(D \geq 20) \times P(190 \leq H \leq 210) \simeq 0.21$$

4-5) Reconnaitre la loi binomiale $B(100, p)$ et connaitre son espérance et sa variance.
6) On cherche $P(S > 75)$. Un calcul direct à la calculatrice avec la loi binomiale est possible : on trouve à peu près 0.

Moivre-Laplace

Exercice 13. Un restaurateur peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.
1. Le restaurateur accepte 90 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 75 clients ?
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Premier exemple d'exercice qui aurait besoin du théorème limite pour un intervalle unilatéral.
Non dit de l'énoncé : les venues ou non des clients sont indépendantes. Sous cette hypothèse si on note N_n le nombre de personnes qui viennent au restaurant parmi celles qui ont réservé, N_n suit une loi binomiale $B(n, 0.8)$ où n est le nombre de réservations acceptées.
1. Ambiguïté de l'énoncé, on ne sait pas si le "plus de" s'entend au sens de supérieur ou égal ou bien de strictement supérieur. Dans ce cas le restaurateur aura un problème s'il dépasse sa capacité, on penche donc pour l'interprétation strictement supérieur.
Avec la calculatrice en utilisant pour la TI binomFRép*(n,p,k) on a* $P(N_{90} > 75) = 1 - P(N_{90} \leq 75) \simeq 0.18$. *On peut remarquer que* $P(N_{90} = 75) \simeq 0.08$ *ce qui n'est pas négligeable devant* 0.18 *(cf. problème d'interprétation de l'énoncé).*
2. On doit trouver n maximal tel que $P(N_n \leq 75) \geq 0.9$, en utilisant la binomiale ceci ne peut se faire qu'avec des essais successifs pour n. En remarquant que $P(N_{75} \leq 75) = 1$ et que le calcul du 1. nous donne $P(N_{90} \leq 75) \simeq 0.82$, on doit tester les entiers compris entre 75 et 90. On obtient ainsi que le nombre maximal de réservations est $n = 88$.

Avec le théorème de Moivre-Laplace. On doit commencer par trouver x tel que $P(-x < Z < x) = 0.9$ soit $P(Z < x) - P(Z \leq -x) = 0.9$ et avec la symétrie $P(Z < x) - (1 - P(Z < x)) = 0.9$ soit $x \simeq 1.64$

(calculatrice). On utilise un intervalle de fluctuation asymptotique pour N_n, calculé à partir d'un intervalle de fluctuation asymptotique pour la proportion. On obtient celui-ci par multiplication par n : l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau 0.90 pour N_n est

$$I_n = [0.8n - 1.64\sqrt{0.8 \times 0.2n}, 0.8n + 1.64\sqrt{0.8 \times 0.2n}]$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(N_n \in I_n) = 0.9$$

Or $P(N_n \in I_n) \leq P(N_n \leq 0.8n + 1.64\sqrt{0.8 \times 0.2n})$ on cherche donc n maximal tel que

$$0.8n + 1.64\sqrt{0.8 \times 0.2n} \leq 75,$$

soit

$$0.8(\sqrt{n})^2 + 0.656\sqrt{n} - 75 \leq 0$$

ce qui nous donne $0 \leq \sqrt{n} \leq 9.28$. La valeur entière maximale qui convient est donc $n = 86$.
On vérifie que nous avons bien $P(N_{86} \leq 75) \geq 0.9$ (avec la calculatrice $P(N_{86} \leq 75) \simeq 0.95$).
Ici on a utilisé la version bilatérale de Moivre Laplace. La version unilatérale (hors programme) aurait conduit à remplacer 1.64 par 1.28 et aurait fourni $n = 88$.
La technicité mise en oeuvre et les différentes approximations faites incitent à penser que pour cet exercice où il y avait assez peu de valeurs de n à tester, le travail direct avec la binomiale est préférable.

Remarque : *Il peut être tentant d'écrire*
$0.8n + 1.64\sqrt{0.8 \times 0.2n} \leq 75 \Leftrightarrow 0,656\sqrt{n} \leq 75 - 0.8n$ *pour, après avoir élevé les deux membres au carré, trouver deux racines à l'équation du second degré en n. Mais on pensera à conserver la condition de validité $75 - 0.8n \geq 0$.*

Exercice 14. Pour un certain type de graines, la probabilité de germination est $p = 0,8$. Une personne sème 400 graines. Donner une approximation de la probabilité que 300 au moins germent.

Non dit, il y a indépendance de la germination des graines entre elles. Le nombre N de graines qui germent parmi les 400 suit une loi binomiale $B(400, 0.8)$.
Cet exercice pourrait être exploité pour estimer l'erreur commise entre un calcul direct avec la binomiale et un calcul en utilisant le théorème de Moivre-Laplace, avec de plus un intervalle unilatéral.
Avec la binomiale, $P(N \geq 300) = 1 - P(N < 300) \simeq 0.9938$.
Avec le théorème de Moivre-Laplace,

$$P(N \geq 300) = P\left(\frac{N - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \geq \frac{300 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right) \simeq P\left(\frac{-20}{8} \leq \frac{N - 320}{8} \leq 10^{99}\right)$$

et en utilisant la convergence ($np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$), en notant Z une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$

$$P(N \geq 300) \simeq P(-2.5 \leq Z \leq 10^{99}) \simeq 0.9938$$

soit la même valeur arrondie au millième.

Cette dernière égalité est à prendre dans le sens où l'on approche un terme d'une suite par sa limite, nous pouvons mesurer ici l'erreur commise en faisant cela.

Exercice 15. Dans une population homogène de 20000 habitants, la probabilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée contre la grippe est de 0.4.
Donner une estimation du nombre de vaccins dont on doit disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieure à 0.05 ?

Non dit, les personnes demandent indépendamment les unes des autres à être ou non vaccinées. Le nombre N de personnes demandant à être vaccinées suit alors une loi binomiale $B(20000, 0.4)$. On demande d'estimer x (sous entendu le plus petit possible) tel que $P(N > x) \leq 0.05$.
Ici si on essaye de trouver x en utilisant directement la loi binomiale et le tableur Open Office, on a un problème lié à la valeur élevée de n, ce qui impose d'utiliser le théorème de convergence (ou un autre moyen de calcul ...). Pas de soucis comparable avec Excel.
Afin d'obtenir un ordre de grandeur pour x, on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95% pour avoir au plus 5% « à gauche ».
L'intervalle de fluctuation asymptotique de $N/20000$ au seuil 0.95 (on a déjà vu que $u_{0.05} \simeq 1.96$) est $I = [0.4 - 1.96\frac{\sqrt{0.4\times0.6}}{\sqrt{20000}}, 0.4 + 1.96\frac{\sqrt{0.4\times0.6}}{\sqrt{20000}}]$
On cherche x le plus petit possible tel que

$$0.4 + 1.96\frac{\sqrt{0.4 \times 0.6}}{\sqrt{20000}} \leq \frac{x}{20000} \Leftrightarrow 0.4 \times 20000 + 1.96\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 20000} \leq x$$

$x = 8136$ convient.
À partir de cette valeur, une recherche directe avec la binomiale nous permet de dire que le plus petit x possible est $x = 8114$.

Exercice 16. Une partie de loterie consiste à lacher une bille dans un appareil qui comporte 6 sorties, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le numéro de la sortie franchie.
Sa loi de probabilité est la suivante

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Le joueur gagne la partie si la bille emprunte les sorties 1, 2, 5 ou 6. Il perd la partie si la bille emprunte les sorties 3 ou 4.
1) Quelle est la probabilité p de gagner une partie ?

Le joueur fait 5 parties successives, elles sont supposées indépendantes. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées.
2) Quelle est la loi suivie par Y ?
3) Quelle est la probabilité que Y soit supérieur ou égal à 1 ?

Le joueur fait 100 parties successives, elles sont supposées indépendantes. On note Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées.
4) Quelle est la loi suivie par Z ? Donner son espérance et sa variance.
5) Par quelle loi à densité (ou loi continue) peut-on approcher la loi de Z ?
6) En utilisant cette approximation, donner une valeur approchée de $P(Z \geq 20)$.

La question 5) est rédigée à la façon BTS, elle peut être laissée dans l'état pour des classes STI2D ou STL mais doit être reformulée pour être dans l'esprit du programme de TS. On pourrait par exemple remplacer les questions 5 et 6 par une unique question du type
"en utilisant le théorème de Moivre-Laplace, donner une valeur approchée de $P(Z \geq 20)$". Aucune difficulté particulière, de plus les paramètres des binomiales intervenant dans cet exercice peuvent permettre un travail direct comme en classe de première.

Exercice 17. Le poids (exprimé en kg) de chaque fromage fabriqué dans une bergerie d'altitude est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 0.900 kg et de variance inconnue σ^2. On suppose que les poids de fromages différents sont des variables aléatoires indépendantes.
Une coopérative conditionne ces fromages pour expédition par lots de 10. On désigne par L la variable aléatoire poids d'un lot ; ainsi si l'on désigne par X_i la variable aléatoire poids du fromage numéro i on a $L = \sum_{i=1}^{10} X_i$.
1) Quelle est l'espérance de L ?
2) Exprimer la variance de L en fonction de σ^2.
3) Quelle est la loi de L ?
4) Quelle variable aléatoire, fonction de L et σ, suit une loi normale centrée réduite ?
5) La coopérative a constaté que le poids d'un lot dépasse 10 kg avec la probabilité 0.15. Déterminer une valeur approchée de l'écart-type σ.
6) (**Indépendante des réponses aux questions précédentes**)
a) La variable aléatoire coût d'expédition C d'un lot est de 5 $Euros$ pour un lot ne dépassant pas 10 kg, et de 7 euros pour un lot dépassant 10 kg. Déterminer l'espérance et la variance de C.
b) La coopérative expédie 100 lots. On note T le coût total d'envoi de ces 100 lots. Utiliser le théorème central-limite pour calculer une valeur approchée de la probabilité pour que T dépasse 600 euros.

Ici aussi il faut commencer par reformuler l'exercice en remplaçant les questions 1-3) par l'affirmation que L suit une loi normale $\mathcal{N}(9, 10\sigma^2)$.

5) L'information $P(L \geq 10) = 0.15$ permet un calcul de quantile pour déterminer σ. Rappelons que ce travail ne peut être fait ici qu'en centrant et réduisant. $P(\frac{L-9}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}) = 0.85$ puis $\frac{1}{\sigma} \simeq 1.036$ et $\sigma \simeq 0.96$.
6a) C prend deux valeurs, la valeur 5 avec la probabilité 0.85 et la valeur 7 avec la probabilité 0.15.
6b) C n'étant pas dans l'état une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli, nous ne sommes pas dans le cadre d'application du programme de terminale. Il est d'ailleurs dit dans l'énoncé "théorème central limite" qui est hors programme. C n'ayant que deux issues numériques possibles on peut exprimer C à l'aide d'une variable aléatoire D suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0.15. Ici on voit aisément que dans tous les cas on paye au moins 5 euros et que le dépassement en cas de surcharge du colis est de 2 euros soit $C = 5 + 2D$.
Ou encore si on note E la variable aléatoire comptant le nombre de colis dépassant les 10 kg parmi les 100 colis on a que E suit une loi binomiale $B(100, 0.15)$ et $T = 500 + 2E$. On termine soit par un calcul direct avec la binomiale, soit par un calcul approché en utilisant le théorème de Moivre-Laplace.

Exercice 18. On veut construire sur un campus universitaire deux restaurants : le RU1 de N_1 places et le RU2 de N_2 places. On suppose que n étudiants prendront leur repas dans l'un de ces deux restaurants. On prévoit que les étudiants choisiront le RU1 avec une probabilité p et dans le RU2 avec une probabilité $1-p$. Leurs choix sont indépendants. On suppose enfin que $n \geqslant 200$.

(1) On note X_n le nombre d'étudiants choisissant le RU1 pour un repas donné. Déterminer la loi de X_n.
(2) Écrire l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n au seuil de $0,95$ de la variable $\frac{X_n}{n}$.
(3) L'administration désire que les n étudiants trouvent une place dans le RU de leur choix avec une probabilité d'au moins $0,95$ à $0,01$ près.
Déterminer l'intervalle J_n dans lequel doit se trouver $\frac{X_n}{n}$ avec une probabilité d'au moins $0,94$.
(4) On suppose que les conditions sont réunies pour que l'on puisse utiliser l'approximation $P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) \simeq 0,95$ à $0,01$ près (ce qui est vrai si $n \geqslant 200$).
Vérifier que si $I_n \subset J_n$ alors $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geqslant 0,94$.
(5) Traduire sous forme de deux inégalités l'inclusion précédente.
(6) Application numérique :
   (a) On suppose que $p = 0,5$ et $n = 1000$. Quelle est la taille minimale des deux RU ?
   (b) On suppose que $p = 0,3$ et $n = 1000$. Quelle est la taille minimale des deux RU ?
   (c) On suppose que $p = 0,5$, $N_1 = N_2 = 500$. En utilisant une inéquation du second degré, déterminer le nombre maximum d'étudiants qui pourront trouver une place.

(1) X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
(2) Question de cours : $I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

(3) $J_n = \left[1 - \frac{N_2}{n} ; \frac{N_1}{n}\right]$. Il faut avoir $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geqslant 0,95$ à $0,01$ près soit $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geqslant 0,94$

(4) Clair.

(5) $I_n \subset J_n \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{N_2}{n} \leqslant p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{N_1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(1-p) + 1,96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} \leqslant N_2 \\ np + 1,96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} \leqslant N_1 \end{cases}$.

(6) (a) On a la même inéquation donnant $N_1 \geqslant 531$ et $N_2 \geqslant 531$.

(b) On obtient $N_1 \geqslant 329$ et $N_2 \geqslant 729$.

(c) On résout $0,5n + 0,98\sqrt{n} - 500 \leqslant 0$ ce qui donne $n \leqslant 938$.