But : travail sur le minimum et le maximum en manipulant des inégalités, des quantificateurs, des opérations logiques, comme la négation, la contraposée. Application aux probabilités : fonction de répartition du maximum de variables aléatoires.

Outil 1. Rappels de logique

— Si P est une proposition, la négation de P sera la proposition qui sera FAUSSE quand P sera VRAIE, et VRAIE quand P sera FAUSSE.
— Si P et Q sont deux propositions, la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $nonQ \Rightarrow nonP$. Une implication et sa contraposée sont équivalentes : si l'une est vraie, l'autre aussi.
— Si P et Q sont deux propositions, la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$. Une implication et sa réciproque ne sont pas forcément équivalentes : une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit, et vice versa.
— La négation de la proposition (P et Q) est la proposition (non P ou non Q)
— La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition (non P et non Q)
— La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie si la proposition $P(x)$ est vraie pour **tous** les éléments de E.
— La proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie si la proposition $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément de E.

Rappel : Si x et y sont deux réels, $\max(x, y) = x$ si $x \geq y$ et $\max(x, y) = y$ si $y \geq x$.
En particulier $x \leq \max(x, y)$.

Un peu d'entrainement :

1. Soit x un réel. Ecrire la négation de la proposition "$P(x) : x \leq 2$". Attention
2. Soient x et y deux réels.
   (a) Justifier l'implication : $(x \leq 2$ et $y \leq 2) \Rightarrow \max(x, y) \leq 2$ Coup de pouce
   (b) Écrire la contraposée de cette implication.
   (c) Écrire la réciproque de cette implication. Est-elle vraie ? Coup de pouce
   (d) Quelle équivalence a-t-on démontré ?
3. Donner, sans utiliser max ni min, une proposition équivalente à $\max(x, y) > 3$. Coup de pouce
4. Donner, sans utiliser max ni min, une proposition équivalente à $\min(x, y) > 3$. Coup de pouce
5. Donner, sans utiliser max ni min, une proposition équivalente à $\min(x, y) < 1$.
6. Soient x_1 et x_2 deux réels. La proposition $(\forall i \in \{1, 2\}, x_i \geq 0)$ est-elle équivalente à la proposition ($x_1 \geq 0$ ET $x_2 \geq 0$) ? Ou à ($x_1 \geq 0$ OU $x_2 \geq 0$) ?

Maintenant que vous avez vu le lien entre inégalités, maximum, minimum, essayons de généraliser un peu

Exercice 1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ n réels. Laquelle (ou lesquelles) de ces équivalences sont correctes ?
— $\max(x_1, \ldots, x_n) \leq 2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leq 2$
— $\min(x_1, \ldots, x_n) \leq 2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leq 2$
— $\max(x_1, \ldots, x_n) \geq 2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \geq 2$
— $\max(x_1, \ldots, x_n) \geq 2 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \geq 2$

Ces écritures seront plus tard extrêmement utiles notamment en probabilités.

Coup de pouce

Outil 2. Application en probabilités

— En probabilités, rappelons que deux événements A_1 et A_2 sont indépendants si $P(A_1$ et $A_2) = P(A_1)P(A_2)$
— On rappelle également que si A et B sont indépendants, c'est aussi le cas de A et du complémentaire de B, et donc aussi des complémentaires de A et de B.
— L'intersection ensembliste se traduit à l'aide d'un "et" : $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$

Un peu d'entrainement : on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires telles que les événements $X \leq 2$ et $Y \leq 2$ sont indépendants. On suppose qu'on connaît les deux réels $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$.

1. Calculer $P(X \leq 2$ et $Y \leq 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$.

2. Calculer $P(X > 2$ et $Y > 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$. Coup de pouce
3. Calculer $P(X > 2$ ou $Y > 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$. Coup de pouce
4. Donner $P(\max(X, Y) \leq 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$. Coup de pouce
5. Donner $P(\min(X, Y) > 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$.
6. Donner $P(\min(X, Y) \leq 2)$ en fonction de $P(X \leq 2)$ et $P(Y \leq 2)$.

Outil 3. Rappels : si une variable aléatoire X suit une loi à densité f, on a $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.
Une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ est une variable aléataoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et qui a pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto \lambda \exp(-\lambda x)$.

Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre λ. Soit x un réel positif. Calculer $P(X \leq x)$. Coup de pouce

Et maintenant, une petite généralisation :

Exercice 2. Soient X et Y deux variables exponentielles de paramètre 1 telles que pour tout réel x les événements $X \leq x$ et $Y \leq x$ sont indépendants.

1. Calculer $P(\max(X, Y) \leq 2)$
2. Calculer pour tout réel x $P(\max(X, Y) \leq x)$
3. Calculer pour tout réel x $P(\min(X, Y) \leq 2)$.
4. Calculer pour tout réel x $P(\min(X, Y) \leq x)$. Vérifier qu'on retrouve la même formule que pour $P(Z \leq x)$, où Z suit une loi exponentielle de paramètre 2.

Coups de pouce

Attention 1. Attention aux inégalités large ou stricte !

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 1. Que peut valoir $\max(x, y)$?

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 2. Utiliser $x \leq \max(x, y)$. On peut aussi faire un dessin pour se représenter les choses.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 3. Quelle est la négation de $\max(x, y) > 3$?

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 4. Faire intervenir les propositions ($x > 3$) ainsi que ($y > 3$).

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 5. Essayer de prendre $n = 2$ ou $n = 3$ pour comprendre ce qui se passe, et prendre des exemples.
Représenter les $x_1, \ldots, x_n$ sur la droite réelle.
Penser au lien entre $\forall$ et ET, eentre $\exists$ et OU.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 6. Quel est l'événement complémentaire de $X \leq 2$?

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 7. Quel est l'événement complémentaire de $(X > 2$ ou $Y > 2)$?

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 8. Utiliser les liens vus précédemment entre max et inégalités.

Retour à l'énoncé

Coup de pouce 9. Remarquer que si X suit une loi exponentielle, $X \leq x \Leftrightarrow 0 \leq X \leq x$.

Retour à l'énoncé

Réponses

Correction Outil 1. 1. La négation de $x \leq 2$ est $x > 2$. (Attention, l'inégalité obtenue est stricte ! En effet, si $x = 2$, la proposition $x \leq 2$ est VRAIE, sa négation doit donc être FAUSSE !)

2. (a) En effet, soit $\max(x, y) = x$ et alors $\max(x, y) \leq 2$ car $x \leq 2$; soit $\max(x, y) = y$ et alors $\max(x, y) \leq 2$. Donc dans tous les cas, $\max(x, y) \leq 2$.
   (b) La négation de $\max(x, y) \leq 2$ est $\max(x, y) > 2$. La négation de $x \leq 2$ et $y \leq 2$ est $x > 2$ ou $y > 2$. La contraposée de $(x \leq 2 \text{ et } y \leq 2) \Rightarrow \max(x, y) \leq 2$ est donc $\max(x, y) > 2 \Rightarrow (x > 2 \text{ ou } y > 2)$. Elle est vraie puisque l'implication précédente était vraie.
   (c) La réciproque de $(x \leq 2 \text{ et } y \leq 2) \Rightarrow \max(x, y) \leq 2$ est $\max(x, y) \leq 2 \Rightarrow (x \leq 2 \text{ et } y \leq 2)$.
   Si on suppose $\max(x, y) \leq 2$, on a $x \leq \max(x, y)$ donc $x \leq 2$ et de même $y \leq \max(x, y)$ donc $y \leq 2$. La réciproque est vraie.
   (d) On a donc finalement démontré $(x \leq 2 \text{ et } y \leq 2) \Leftrightarrow \max(x, y) \leq 2$. Puisque cela a été démontré quels que soient les réels x et y, on a même :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq 2 \text{ et } y \leq 2) \Leftrightarrow \max(x, y) \leq 2$$

3. On utilise la contraposée précédente (et on remplace 2 par 3) :

$$\max(x, y) > 3 \Leftrightarrow (x > 3 \text{ ou } y > 3)$$

4. On trouve de la même manière, en remarquant que $x \geq \min(x, y)$,

$$\min(x, y) > 3 \Leftrightarrow (x > 3 \text{ et } y > 3)$$

5. Par contraposition de la formule précédente,

$$\min(x, y) < 1 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } y < 1)$$

6. La proposition $(\forall i \in \{1, 2\}, x_i \geq 0)$ est vraie si la proposition $x_i \geq 0$ est vraie pour tous les i de l'ensemble $\{1, 2\}$, c'ést-à-dire si elle vraie pour $i = 1$ et $i = 2$.
   Ainsi elle est équivalente à $(x_1 \geq 0 \text{ ET } x_2 \geq 0)$.

Correction Exercice 1. Ce qu'on a fait pour deux réels x et y se généralise pour n réels. Ainsi on a bien $\max(x_1, \ldots, x_n) \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 \leq 2 \text{ et } x_2 \leq 2 \ldots \text{ et } x_n \leq 2)$. Ceci se traduit à l'aide d'un quantificateur $\forall$ puisque la propriété d'être inférieur à 2 doit être vraie pour tous les x_i :

$$\max(x_1, \ldots, x_n) \leq 2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leq 2$$

De même $\max(x_1, \ldots, x_n) \geq 2 \Leftrightarrow (x_1 \geq 2 \text{ ou } x_2 \geq 2 \ldots \text{ ou } x_n \leq 2)$. Ceci se traduit à l'aide d'un quantificateur $\exists$ puisque la propriété d'être supérieur à 2 doit être vraie pour au moins l'un des x_i :

$$\max(x_1, \ldots, x_n) \geq 2 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \geq 2$$

Les autres propositions sont fausses : par exemple si $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ on a bien $\min(x_1, x_2) \leq 2$ mais pas $(x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2)$.
Avec le même exemple on a également $\max(x_1, x_2) \geq 2$ mais pas $(x_1 \geq 2 \text{ et } x_2 \geq 2)$.

Correction Outil 2. 1. Par définition de l'indépendance d'événements,

$$P(X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2) = P(X \leq 2)P(Y \leq 2)$$

.

2. Le complémentaire de $X \leq 2$ est $X > 2$, et le complémentaire de $Y \leq 2$ est $Y > 2$. Les deux événements $X > 2$ et $Y > 2$ sont donc indépendants, et

$$P(X > 2 \text{ et } Y > 2) = P(X > 2)P(Y > 2) = (1 - P(X \leq 2))(1 - P(Y \leq 2))$$

3. Le complémentaire de $(X > 2 \text{ ou } Y > 2)$ est $(X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2)$. On en déduit en utilisant la première question
$$P(X > 2 \text{ ou } Y > 2) = 1 - P(X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2) = 1 - P(X \leq 2)P(Y \leq 2)$$
4. On a vu $\max(X, Y) \leq 2 \Leftrightarrow (X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2)$. Ainsi
$$P(\max(X, Y) \leq 2) = P(X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2) = P(X \leq 2)P(Y \leq 2)$$
5. On a vu $\min(X, Y) > 2 \Leftrightarrow (X > 2 \text{ et } Y > 2)$. Ainsi
$$P(\min(X, Y) > 2) = P(X > 2 \text{ et } Y > 2) = (1 - P(X \leq 2))(1 - P(Y \leq 2))$$
6. Le complémentaire de $(\min(X, Y) \leq 2)$ est $(\min(X, Y) > 2)$. On en déduit
$$P(\min(X, Y) \leq 2) = 1 - P(\min(X, Y) > 2) = 1 - (1 - P(X \leq 2))(1 - P(Y \leq 2)) = P(X \leq 2) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 2)$$

Correction Outil 3. $P(X \leq x) = \int_0^x \lambda \exp(-\lambda t) dt = [-\exp(-\lambda t]_0^x = 1 - \exp(-\lambda x)$

Correction Exercice 2.

1. A l'aide de l'outil 2 question 4 et de l'outil 3,
$$P(\max(X, Y) \leq 2) = P(X \leq 2 \text{ et } Y \leq 2) = P(X \leq 2)P(Y \leq 2) = (1 - \exp(-2))^2$$
2. De même, si x est un réel positif,
$$P(\max(X, Y) \leq x) = P(X \leq x \text{ et } Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = (1 - \exp(-x))^2$$
Si x est un réel négatif on peut commencer par remarquer que $P(X \leq x) = 0$ et $P(Y \leq x) = 0$ et comme ci-dessus
$$P(\max(X, Y) \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = 0$$
3. Avec la question 6 il vient
$$P(\min(X, Y) \leq 2) = 1 - (1 - P(X \leq 2))(1 - P(Y \leq 2))$$
Or $1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - \exp(-2)) = \exp(-2)$. Et finalement
$$P(\min(X, Y) \leq 2) = 1 - \exp(-2)\exp(-2) = 1 - \exp(-4)$$
.
4. De même,
$$P(\min(X, Y) \leq x) = 1 - (1 - P(X \leq x))(1 - P(Y \leq x))$$
On a $1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - \exp(-x)) = \exp(-x)$ pour x réel positif et $1 - P(X \leq x) = 1 - 0 = 1$ pour x réel négatif. Et finalement
$$P(\min(X, Y) \leq x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x)\exp(-x) = 1 - \exp(-2x) \text{ si } x \geq 0 \\ 1 - 1 \times 1 = 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
Et si Z suit une loi exponentielle de paramètre 2, on a vu qu'on a bien également
$$P(Z \leq x) = 1 - \exp(-2x) \text{ pour } x \geq 0 \quad \text{et} \quad P(Z \leq x) = 0 \text{ pour } x < 0$$