

Multiplication russe

Fiche élève

Peut-on multiplier deux nombres entiers sans connaître ses tables de multiplications ?

Oui, bien sûr, il suffit de faire suffisamment d'additions... Ainsi, par exemple, $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$!

Cette méthode va cependant vite s'avérer fastidieuse dès que le multiplicateur est grand... Il existe une autre méthode, dite *multiplication russe*, qui nécessite simplement de savoir diviser par 2, multiplier par 2 (ce qui revient à une simple addition) et reconnaître un nombre impair...

Travail préparatoire

Le principe de cette méthode est le suivant : on construit deux colonnes de nombres dont la première ligne est constituée des deux nombres à multiplier, disons a et b . Les lignes suivantes sont obtenues ainsi : pour la colonne de droite on divise par deux le nombre du dessus (quotient entier) et, pour la colonne de gauche, on multiplie par deux le nombre du dessus. On s'arrête lorsque le nombre de droite vaut 0 (inutile dans ce cas de calculer le nombre de gauche). Le produit $a \times b$ est alors égal à la somme des nombres de la colonne de gauche dont le nombre correspondant à droite est impair.

Illustrons cette méthode par un exemple, en prenant $a = 33$ et $b = 18$. On construit le tableau suivant :

33	18
66	9
132	4
264	2
528	1
--	0

On ne retient alors que les 2^e et 5^e lignes (car seuls 9 et 1 sont impairs) et, ainsi :

$$33 \times 18 = 66 + 528 = 594.$$

C'est magique, non ?

1. Compléter le tableau suivant, qui permet de calculer le produit 51×27 :

51	27

Ainsi, $51 \times 27 = \dots\dots\dots$

Mise en œuvre de l'algorithme

2. Écrire un algorithme en pseudo-code (langage algorithmique libre) qui effectue la multiplication de deux nombres en n'effectuant que des additions (la méthode fastidieuse...).

3. Écrire un algorithme en pseudo-code qui effectue la multiplication de deux nombres en n'effectuant que des divisions par deux et des additions (la méthode russe...).

Remarque. On calculera la somme des nombres à retenir au fur et à mesure...

4. Traduire ces deux algorithmes sous Algobox et les tester. Quelle réponse fournissent-ils pour $a = 51$ et $b = 27$?

Modification de l'algorithme

5. Modifier l'algorithme « multiplication russe » pour qu'il affiche le nombre de divisions et le nombre d'additions réalisées.

Multiplication russe

Fiche enseignant

Objectifs. Introduction de la structure répétitive TANT-QUE.

Prérequis. Notions de base d'algorithmique (notion de variable, entrées-sorties, structure conditionnelle SI-ALORS-SINON, et éventuellement la structure répétitive POUR).

Peut-on multiplier deux nombres entiers sans connaître ses tables de multiplications ?

Oui, bien sûr, il suffit de faire suffisamment d'additions... Ainsi, par exemple, $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$!

Cette méthode va cependant vite s'avérer fastidieuse dès que le multiplicateur est grand... Il existe une autre méthode, dite *multiplication russe*, qui nécessite simplement de savoir diviser par 2, multiplier par 2 (ce qui revient à une simple addition) et reconnaître un nombre impair...

La multiplication russe est un cas particulier de la méthode utilisée dans l'Égypte antique, où l'on utilisait parfois une base autre que la base deux pour cette décomposition...

Travail préparatoire

Le principe de cette méthode est le suivant : on construit deux colonnes de nombres dont la première ligne est constituée des deux nombres à multiplier, disons a et b . Les lignes suivantes sont obtenues ainsi : pour la colonne de gauche, on multiplie par deux le nombre du dessus, et pour la colonne de droite on divise par deux le nombre du dessus (quotient entier). On s'arrête lorsque le nombre de droite vaut 1. Le produit $a \times b$ est alors égal à la somme des nombres de la colonne de gauche dont le nombre correspondant dans la colonne de droite est impair.

Illustrons cette méthode par un exemple, en prenant $a = 33$ et $b = 18$. On construit le tableau suivant :

33	18
66	9
132	4
264	2
528	1
--	0

On ne retient alors que les 2^e et 5^e lignes (car seuls 9 et 1 sont impairs) et, ainsi :

$$33 \times 18 = 66 + 528 = 594.$$

1. Compléter le tableau suivant, qui permet de calculer le produit 51×27 :

51	27
102	13
204	6
408	3

816	1
--	0

Ainsi, $51 \times 27 = 51 + 102 + 408 + 816 = 1377$

Mise en œuvre de l'algorithme

2. Écrire un algorithme en pseudo-code (langage algorithmique libre) qui effectue la multiplication de deux nombres en n'effectuant que des additions (la méthode fastidieuse...).

On peut utiliser la structure POUR ou la structure TANT-QUE :

```

1ère version :
Donner la valeur 0 à produit
Pour compteur variant de 1 à b
Faire
    Donner la valeur produit + a à produit
Fin-Pour
Afficher produit

2ème version :
Donner la valeur 0 à produit
Donner la valeur 0 à compteur
Tant-que (compteur < b)
Faire
    Donner la valeur produit + a à produit
    Donner la valeur compteur + 1 à compteur
Fin-tant-que
Afficher produit
  
```

3. Écrire un algorithme en pseudo-code qui effectue la multiplication de deux nombres en n'effectuant que des divisions par deux et des additions (la méthode russe...).

Remarque. On calculera la somme des nombres à retenir au fur et à mesure...

```

Donner la valeur a à gauche
Donner la valeur b à droite
Donner la valeur 0 à produit
Tant-que (droite > 0)
Faire
    Si droite est impair
    Alors donner la valeur produit + droite à produit
    Fin-Si
    Donner la valeur gauche + gauche à gauche
    Donner la valeur droite div 2 à droite
Fin-tant-que
Afficher produit
  
```

4. Traduire ces deux algorithmes sous Algobox et les tester. Quelle réponse fournissent-ils pour $a = 51$ et $b = 27$?

Les deux algorithmes sont les suivants :

```

MultiplicationParAdditions - 27.01.2015
*****
Cet algorithme calcule le produit de deux entiers positifs par additions
successives.
*****
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
5  produit EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  AFFICHER "Entrez les deux valeurs à multiplier :"
8  LIRE a
9  LIRE b
10 produit PREND_LA_VALEUR 0
11 compteur PREND_LA_VALEUR 0
12 TANT_QUE (compteur < b) FAIRE
13   DEBUT_TANT_QUE
14   produit PREND_LA_VALEUR produit + a
15   compteur PREND_LA_VALEUR compteur + 1
16   FIN_TANT_QUE
17 AFFICHER "Le produit de "
18 AFFICHER a
19 AFFICHER " par "
20 AFFICHER b
21 AFFICHER " vaut "
22 AFFICHER produit
23 FIN_ALGORITHME
  
```

```

MultiplicationRusse - 27.01.2015
*****
Cet algorithme calcule le produit de deux entiers positifs par la méthode
russe.
*****
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  produit EST_DU_TYPE NOMBRE
5  gauche EST_DU_TYPE NOMBRE
6  droite EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  AFFICHER "Entrez les deux valeurs à multiplier :"
9  LIRE a
10 LIRE b
11 gauche PREND_LA_VALEUR a
12 droite PREND_LA_VALEUR b
13 produit PREND_LA_VALEUR 0
14 TANT_QUE (droite > 0) FAIRE
15   DEBUT_TANT_QUE
16   SI (droite % 2 == 1) ALORS
17     DEBUT_SI
  
```

```

18     produit PREND_LA_VALEUR produit + gauche
19     FIN_SI
20     gauche PREND_LA_VALEUR gauche + gauche
21     droite PREND_LA_VALEUR floor(droite / 2)
22     FIN_TANT_QUE
23     AFFICHER "Le produit de "
24     AFFICHER a
25     AFFICHER " par "
26     AFFICHER b
27     AFFICHER " vaut "
28     AFFICHER produit
29     FIN_ALGORITHME
  
```

Modification de l'algorithme

5. Modifier l'algorithme « multiplication russe » pour qu'il affiche le nombre de divisions et le nombre d'additions réalisées.

Il suffit de rajouter deux compteurs, sans oublier de les initialiser... On obtient l'algorithme suivant :

```

MultiplicationRusse_v2 - 27.01.2015
*****
Cet algorithme calcule le produit de deux entiers positifs par la méthode
russe et compte le nombre d'additions et de divisions effectuées.
*****
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  produit EST_DU_TYPE NOMBRE
5  gauche EST_DU_TYPE NOMBRE
6  droite EST_DU_TYPE NOMBRE
7  cpt_additions EST_DU_TYPE NOMBRE
8  cpt_divisions EST_DU_TYPE NOMBRE
9  DEBUT_ALGORITHME
10 AFFICHER "Entrez les deux valeurs à multiplier :"
11 LIRE a
12 LIRE b
13 gauche PREND_LA_VALEUR a
14 droite PREND_LA_VALEUR b
15 produit PREND_LA_VALEUR 0
16 cpt_additions PREND_LA_VALEUR 0
17 cpt_divisions PREND_LA_VALEUR 0
18 TANT_QUE (droite > 0) FAIRE
19     DEBUT_TANT_QUE
20     SI (droite % 2 == 1) ALORS
21         DEBUT_SI
22             produit PREND_LA_VALEUR produit + gauche
23             cpt_additions PREND_LA_VALEUR cpt_additions + 1
24         FIN_SI
25     gauche PREND_LA_VALEUR gauche + gauche
26     cpt_additions PREND_LA_VALEUR cpt_additions + 1
27     droite PREND_LA_VALEUR floor(droite / 2)
28     cpt_divisions PREND_LA_VALEUR cpt_divisions + 1
29     FIN_TANT_QUE
30 AFFICHER "Le produit de "
  
```

```
31  AFFICHER a
32  AFFICHER " par "
33  AFFICHER b
34  AFFICHER " vaut "
35  AFFICHER produit
36  AFFICHER "L'algorithmme a effectué "
37  AFFICHER cpt_additions
38  AFFICHER " additions et "
39  AFFICHER cpt_divisions
40  AFFICHER " divisions par 2."
41  FIN_ALGORITHME
```