Quelques pistes pour enseigner les probabilités en seconde :

Introduction :
Comment ne pas évoquer le hasard dans un travail sur les probabilités ? Les énoncés d'exercices de probabilité y font souvent référence. Mais comment peut-on **définir le hasard** ?
Joseph Bertrand (1822-1900) mettra en évidence la nécessité de définir correctement cette notion de hasard avec son paradoxe qu'il énonce pour la première fois dans son ouvrage « Calcul des probabilités ».
Le problème est le suivant : ***étant donné un cercle de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde choisie au hasard soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit, c'est-à-dire*** $\sqrt{3}$ ***?***
Joseph Bertrand proposait trois solutions avec trois résultats différents : une où les extrémités sont choisies au hasard uniformément sur le cercle, une où la corde est perpendiculaire à un rayon choisi au hasard uniformément et une dernière où le milieu de la corde est choisie au hasard uniformément
Il est donc indispensable de définir correctement ce qu'on entend par « une corde choisie au hasard ». Lorsque l'expérience est correctement définie, il n'y a pas d'ambiguïté sur le calcul des probabilités.

Bien que les mots hasard et aléatoire aient la même étymologie (le mot hasard tire son origine indirectement de l'arabe az-zaher (dé à jouer) et le mot Alea est un mot latin qui signifie jeu de dés), il faut, en mathématiques, distinguer le hasard de l'aléatoire. Le hasard est un enchaînement de faits non reproductibles. On qualifie d'expérience aléatoire, une expérience définie par un protocole reproductif et quantifiable dont toutes les issues sont connues.
Dans les énoncés des exercices, l'expérience aléatoire doit être définie précisément puisque de cette définition dépend celle de son univers.

Dans cet énoncé :
Dans un sachet opaque, on dispose de 16 cartons indiscernables au toucher portant les lettres du nom de la célèbre mathématicienne Maryam Mirzakhani .
M A R Y A M M I R Z A K H A N I
On tire au hasard un carton de ce sachet

L'univers de l'expérience est l'ensemble des 16 cartons
Maintenant si on précise : « On tire au hasard un carton de ce sachet et on note la lettre qu'il porte **»,** on peut considérer l'univers comme l'ensemble des 16 cartons avec sa loi uniforme ou considérer que l'univers est E={A, M, R, Y, K, H, I, Z, N} avec une autre loi qu'une loi uniforme.
Dans ce dernier cas, on est confronté à la difficulté du calcul des probabilités.

Historiquement deux aspects se côtoient : l'aspect fréquentiste (Bernoulli) et l'aspect causaliste ($\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, dans les structures d'équiprobabilité de Laplace).
Henri Poincaré en 1856 écrit : « on n'a pas de définition satisfaisante des probabilités » en pointant notamment le cercle vicieux qu'est la définition de la loi des grands nombres , une probabilité est la limite des fréquences d'expériences indépendantes or l'indépendance est définie par la probabilité ...

De même si on utilise la formule : $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, on doit définir l'équiprobabilité.

Il faudra attendre les travaux de Kolmogorov (1903-1987) pour avoir une formalisation rigoureuse de la notion de probabilités.

Dans l'axiomatique de Kolmogorov, un espace probabilisé est défini comme un triplet (Ω,A,P) où :

- Ω est un ensemble
- A est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω tel que :
  - Il contient Ω
  - il est stable par passage au complémentaire
  - il est stable par réunion dénombrable
- P est une application de A dans [0;1] telle que :
  - P(Ω)=1
  - si (A_n) est une famille d'événements deux à deux incompatibles,
    $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$

Dans le programme du cycle 4, les compétences attendues sont :

- Calculer des probabilités dans des cas simples (par exemple évaluation des chances de gain dans un jeu)
- Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage)
- Faire le lien entre fréquence et probabilité

Et on peut lire dans le document d'accompagnement: « *L'approche se fait d'abord à partir de situations familières aux élèves et relevant de l'équiprobabilité puis, à partir de la classe de quatrième, de manière fréquentiste (observation de la stabilisation des fréquences) pour disposer d'autres modèles(…..) La formalisation ensembliste n'est pas un attendu du programme.* »

En classe de seconde, on formalise la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. La formalisation du langage probabiliste est donc un objectif du lycée.

1. Le langage des événements en probabilités :

Nous avons choisi de commencer par un travail sur le langage des événements en lien avec la notion ensembliste. Dans ce chapitre, nous ne faisons pas calculer de probabilités, nous mettons en place le vocabulaire et les définitions autour de la notion d'événements.

La notion d'événement au sens probabiliste peut être ambiguë et nécessite un travail particulier.
Dans le modèle probabiliste, un événement est un sous-ensemble de l'univers E.
Par exemple dans le lancer d'un dé cubique, « obtenir un nombre pair » est l'événement A={2 ; 4 ; 6}.
Or on voit souvent écrit : A: « obtenir un nombre pair », l'événement est alors confondu avec une proposition. Les puristes distingueraient les deux en écrivant:
P_1 : « obtenir un nombre pair » pour définir une proposition et A={2;4;6} ou encore A={ $x \in \mathrm{E}$ tel que x est pair } pour définir l'événement associé.
On écrit indifféremment P(A) ou P(« A est réalisé »).
Nous ne faisons pas la distinction dans ce document pour éviter des lourdeurs qui nous semblent inutiles. Cependant, il faudra bien clarifier les consignes pour les élèves en précisant si l'on attend la description d'un événement par une assertion ou si l'on souhaite sa définition ensembliste.

Mise en œuvre de la situation « les jetons », proposée par Hassiba Kouchane

Notions traitées : Langage des évènements, cardinal, réunion et intersection de deux évènements, formule $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

Connaissances et capacités attendues à la fin de la séquence :

- Étudier des expériences aléatoires
- Interpréter des évènements de manière ensembliste
- Passer de la description d'un évènement par une phrase à l'ensemble en extension et inversement
- Mettre en place le vocabulaire lié aux ensembles
- Reconnaître la notation inter et union

Objectifs de l'enseignant :

- Appréhender la définition ensembliste d'un évènement
- Introduire la réunion et l'intersection de deux évènements dans divers registres
- Définir des évènements incompatibles
- Différencier le « ou » exclusif du « ou » inclusif (comparaison sens mathématique et usage dans langage usuel)
- Découvrir la relation $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$

Pré-requis nécessaires : notations pour un ensemble (accolades), diagramme de Venn (vu précédemment dans les pourcentages de pourcentages), lire et interpréter des données dans un tableau à double entrée, appartenance d'un élément à un ensemble.

Déroulement prévu :

Étape 1 : (5-10 minutes) Brainstorming

On peut commencer la séance en demandant aux élèves ce qu'évoque pour eux le mot « probabilité ». On voit ainsi émerger des mots de vocabulaire : univers, expérience aléatoire, issue etc. mais aussi : chance, hasard etc.

Étape 2 : (20 minutes) Activité de recherche/de découverte

Organisation pédagogique : travail individuel, l'énoncé sera projeté au tableau.

Matériel pédagogique : aimants pour aider à la visualisation de la composition de l'urne ou pour aider à l'interprétation d'évènements de manière ensembliste. On dispose ainsi de 7 aimants verts (3 ronds et 4 carrés) , 4 aimants bleus (1 rond et 3 carrés) et 6 aimants noirs (2 ronds et 4 carrés).

Consigne :

On dispose d'une urne remplie de jetons verts, bleus et noirs de forme ronds ou carrés. Les jetons sont répartis en quantité de la manière suivante :

	Verts	*Bleus*	*Noirs*
Ronds	3	1	2
Carrés	4	3	4

On considère l'expérience aléatoire : on pioche au hasard un jeton dans l'urne.

Chaque jeton possiblement tiré est appelé une issue. L'ensemble de toutes les issues est appelé l'univers et on le note E.

1. Combien l'ensemble E comporte-t-il d'issues ?

Le nombre d'issues de E est appelé le cardinal de E et on peut le noter $\text{card}(E)$.

2. a. On s'intéresse à l'ensemble R des jetons ronds. On dit que R est l'évènement « le jeton est rond ».
Quelles sont les issues de l'évènement R ? Combien y en a-t-il ?

b. On considère les évènements B : « le jeton est bleu » et V : « le jeton est vert ». Décrire les issues de chacun et donner leur nombre.

c. Que peut-on dire de l'évènement J : « le jeton est jaune » ?

3. a. On définit l'évènement contraire de R, que l'on note $\overline{R}$: c'est l'ensemble des jetons qui ne sont pas ronds. Quel est son cardinal ?

b. Décrire l'évènement $\overline{V}$ et donner son cardinal.

c. Conjecturer une relation entre le cardinal d'un évènement et le cardinal de son contraire.

4. On définit l'évènement $R \cup B$ comme l'évènement constitué des issues qui appartiennent à R ou à B ou aux deux. On lit R **union** B , on peut aussi dire R **ou** B .

a. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $R \cup B$?

b. Donner le cardinal de $R \cup B$

c. Comparez $\text{card}(R \cup B)$ avec $\text{card}(R) + \text{card}(B)$.

5. On s'intéresse cette fois ci aux évènements V et B.

a. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $V \cup B$?

b. Donner le cardinal de $V \cup B$.

c. Comparer $\text{card}(V \cup B)$ avec $\text{card}(V) + \text{card}(B)$.

6. On définit l'évènement $R \cap B$ comme l'évènement constitué des issues qui appartiennent à la fois à R et à B. On lit R **inter** B, on peut aussi dire R **et** B .

a. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $R \cap B$?

b. Donner le cardinal de $R \cap B$.

7. Proposer une formule générale permettant de calculer le cardinal de l'union de deux évènements.

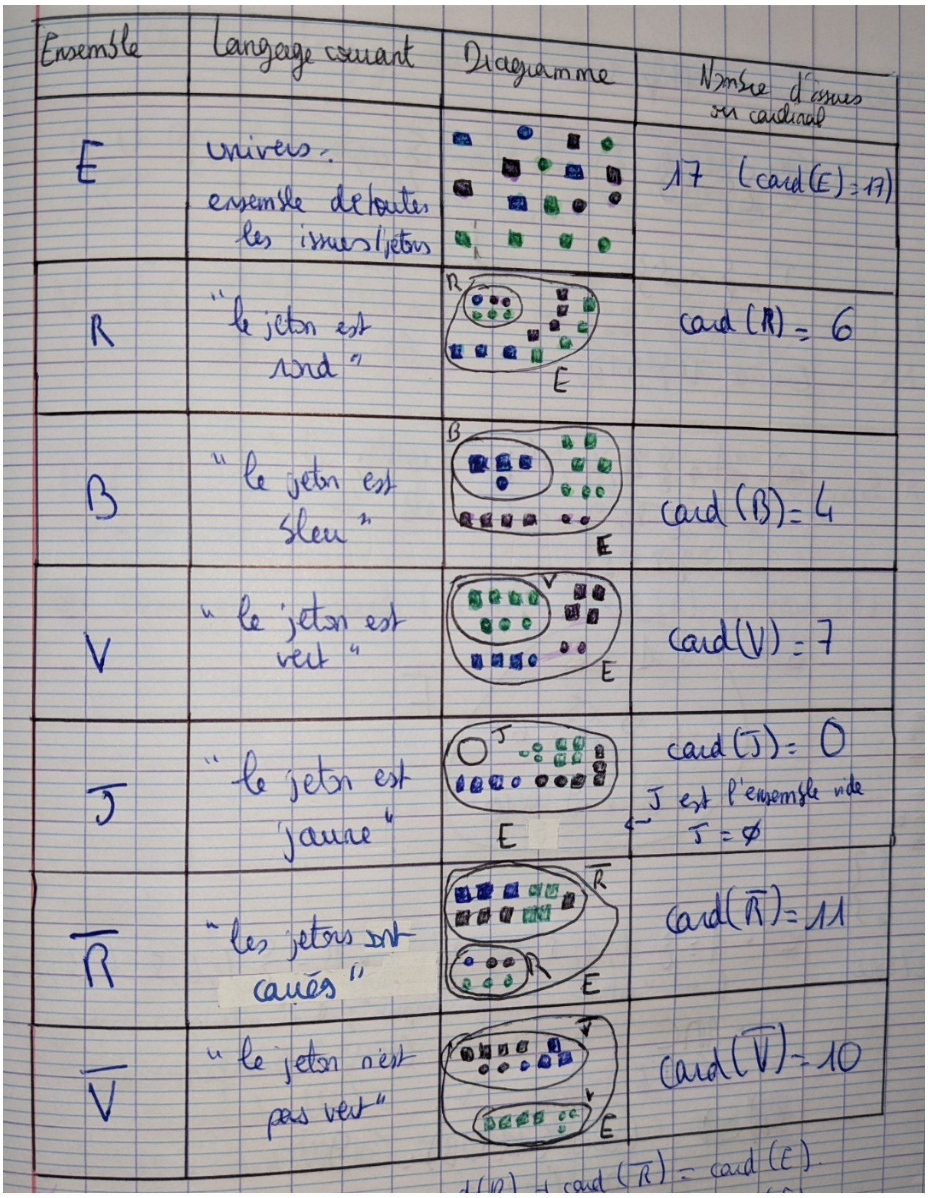
8. On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard un jeton et on regarde sa couleur. Définir l'univers Ω de cette expérience.

Tâche de l'élève :

- Lire et interpréter les données du tableau pour visualiser mentalement la composition de l'urne
- Déterminer l'univers et son cardinal
- Identifier les issues (jetons) qui réalisent l'évènement considéré
- Dénombrer ces issues
- Comprendre une définition dans un énoncé (pour l'union et l'intersection d'évènements) et interpréter de manière ensembliste (éléments de l'ensemble)
- Analyser/critiquer un résultat, sa cohérence
- Faire le lien entre ce qui a été montré dans les questions précédentes, isoler l'essentiel
- Établir une relation générale, décontextualiser.

Remarques :

- On peut proposer aux élèves d'utiliser un tableau qu'on complétera au fur et à mesure des questions (on pourra l'introduire dès le début de l'activité pour la première ligne).
  En voici un exemple :



Ensemble	Langage courant	Diagramme	Nombre d'issues ou cardinal
E	univers. ensemble de toutes les issues/jetons		17 (card(E) = 17)
R	"le jeton est rond"	R E	card(R) = 6
B	"le jeton est bleu"	B E	card(B) = 4
V	"le jeton est vert"	V E	card(V) = 7
J	"le jeton est jaune"	J E	card(J) = 0 J est l'ensemble vide $J = \emptyset$
$\overline{R}$	"les jetons sont carrés"	$\overline{R}$ R E	card($\overline{R}$) = 11
$\overline{V}$	"le jeton n'est pas vert"	$\overline{V}$ V E	card($\overline{V}$) = 10

card(R) + card($\overline{R}$) = card(E)

- À la fin de la question 3, on fait une première mise en commun pour s'assurer que les élèves aient compris.

- Question 5 : On insiste sur le fait de bien distinguer le « ou » exclusif, qui est souvent utilisé dans la langue naturelle, du « ou » inclusif au sens de la logique mathématique. On pourra citer des exemples aux élèves :Sur la carte d'un restaurateur, une formule affiche « fromage ou dessert » (ou exclusif).
  On pose la question « Tu commences à 8h10 ou 9h10 ? » (ou exclusif).
  En mathématiques et particulièrement en logique il s'agira d'un « ou » inclusif ($R \cup B$ désigne R seul ou B seul ou les deux simultanément).
  On peut questionner les élèves pour relancer l'activité : « Pourquoi a-t-on égalité dans certains cas ? À quelle condition ? » et motiver l'intérêt pour la question 6. Les élèves peuvent pressentir la différence et parler d'intersection, on pourra s'appuyer sur cette remarque pour motiver l'étude de l'intersection d'évènements.

- La question 8 permet de revenir sur la définition de l'univers d'une expérience aléatoire et commencer à préciser que celui-ci dépend de l'expérience aléatoire et pas uniquement du matériel utilisé pour définir cette expérience.
  Ici on pourrait garder l'ensemble de tous les jetons ou travailler avec l'univers $\Omega = \{$ Vert, Bleu, Noir$\}$.
  Dans le cas où l'on choisit comme univers l'ensemble de tous les jetons, on est dans une situation d'équiprobabilité. Par contre si l'on choisit l'univers $\Omega = \{$ Vert, Bleu, Noir$\}$, les éléments de cet ensemble ne sont pas équiprobables.

Étape 3 : Institutionnalisation et exercices d'application.

Vous trouverez à la page suivante une proposition de fiche de cours et une proposition de fiche d'exercices.

FICHE ÉLÈVE **le langage des évènements en probabilité**

1. Expérience aléatoire

- Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle conduit à plusieurs **issues** qu'on est capable de citer sans qu'on puisse prévoir laquelle de ces issues sera réalisée. De plus, on doit être capable de reproduire cette expérience dans les mêmes conditions.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelée **l'univers**.

Notation : Lorsque les issues de l'expérience sont notées x_1 ; x_2 ; … ; x_n ,
on note E = {x_1 ; x_2 ; … ; x_n }.

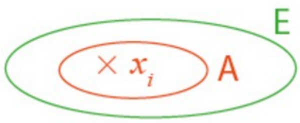
Exemples :

1) On lance une pièce et on regarde la face du dessus. On note P l'issue « obtenir pile » et F l'issue « obtenir face ».
L'ensemble des issues (l'univers) est : E =

2) On lance un dé cubique et on s'intéresse à la face du dessus. On note 1 l'issue « obtenir le numéro 1 », etc.
L'univers est : E =

2. Événement d'un univers

- Un **événement** est une partie (un sous-ensemble) de l'univers E d'une expérience aléatoire. On peut noter $A \subset E$ (se lit « A est contenu dans E »).
- Lorsqu'une issue x_i est un élément de A, on dit que l'issue x_i **réalise** l'évènement A. On peut noter $x_i \in A$ (se lit « x_i appartient à A »).



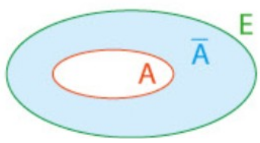
Exemples : On lance un dé à 6 faces.
L'événement A : "obtenir un résultat strictement supérieur à 4" est réalisé par les issues

____

On note : A =   . Par exemple, $6 \in A$: l'issue 6 réalise l'évènement A.

L'évènement B = {2 ; 4 ; 6} est « ________________________________ ».
L'événement I : « obtenir le numéro 7 » est **impossible.** On note : I = $\emptyset$.
L'événement T : « obtenir un numéro au moins égal à 1 » est **certain** ; On note : T = E.

3. Évènement contraire

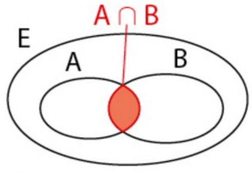


Définition : L'évènement **contraire** d'un évènement A est l'évènement, formé de toutes les issues de E qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.

Exemple : lancer d'un dé cubique, on considère l'évènement A : « obtenir un résultat strictement supérieur à 4 ».
A = _______________ donc $\overline{A}$= _____________________ .
$\overline{A}$ est l'évènement « ____».

4. Intersection et réunion d'ensembles

Si A et B sont deux ensembles, l'intersection de ces deux ensembles est constituée des éléments communs à A et à B, on la note $A \cap B$.

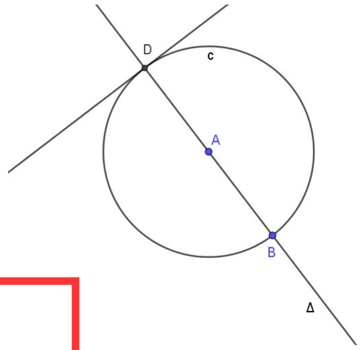


Exemples :

1. A= { 0;1;2;3;4;5;6} et B={-2;0;2;4;6;8} , $A \cap B$ =

2. A= $\{-5;-\sqrt{2};0;1;\sqrt{3};15\}$ et B= $\mathbb{Z}$, $A \cap B$ =

3. *c* est le cercle de centre A , Δ est la droite (AB) , $c \cap \Delta =$.......



4. A=[-4;5] et B=[2;7] , $A \cap B$ =

5. A=[3;7] et B=[0;2], $A \cap B$ =

Lorsque A ∩ B = ∅, les ensembles n'ont aucun élément commun, on dit qu'ils sont **disjoints** .

En probabilité, on dit que les événements sont **incompatibles.**

Exercice : On reprend le problème des jetons

	Verts	*Bleus*	*Noirs*
Ronds	3	1	2
Carrés	4	3	4

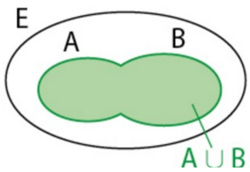
1. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $R \cap N$?

2. Comment note-t-on l'ensemble des jetons à la fois ronds et bleus ?

3. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $\overline{R} \cap N$?

4. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $R \cap \overline{N}$?

Si A et B sont deux ensembles, la réunion de ces deux ensembles est constituée des éléments appartenant à A ou à B ou aux deux.
On le note $A \cup B$



Exemples

A= $\{-5;-\sqrt{2};0;1;\sqrt{3};15\}$ et B= $\left\{-\frac{15}{3};-1;0;\sqrt{4}\right\}$, $A \cup B$ =

A=[-4;5] et B=[2;7] , $A \cup B$ =

A=[3;7] et B=[0;2], $A \cup B$ =

Et en probabilité ? on reprend le problème des jetons :

1. Quels sont les jetons appartenant à l'ensemble $R \cup N$?

2. Donner le nombre d'issues dans $R \cup N$?

Exercice : On lance un dé cubique.

On considère les évènements A : "obtenir un résultat strictement supérieur à 4" et
B : "obtenir un résultat pair"

A = B = et C =

A ∩ B est l'évènement « ____ »
A ∩ B =
A ∪ B est l'évènement « ____ »
A ∪ B =

Fiche d'exercices langage des probabilités –

Exercice 1 : une grande mathématicienne

Dans un sachet opaque, on dispose de 16 cartons indiscernables au toucher portant les lettres du nom de la célèbre mathématicienne Maryam Mirzakhani .

M	A	R	Y	A	M	M	I	R	Z	A	K	H	A	N	I

On tire au hasard un carton de ce sachet.

1. Combien y a-t-il d'issues à cette expérience ?
2. On note A l'événement : « le carton porte la lettre A ». Combien a-t-il d'issues ?
3. Décrire l'événement $\overline{A}$, combien a-t-il d'issues ?
4. Soit V l'événement « le carton porte une voyelle ». Compléter.

V = ……………………………….. $\overline{V}$ = …………………………………………

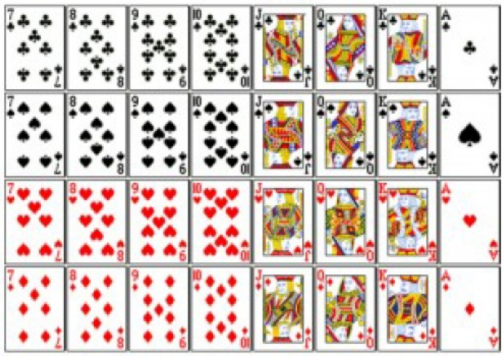
Maryam Mirzakhani , née le 12 mai 1977 à Téhéran et morte le 14 juillet 2017 à Stanford (Californie), est une mathématicienne iranienne, professeur à l'université Stanford, connue pour ses travaux en topologie et en géométrie . Elle est la première femme à recevoir la médaille Fields le 13 août 2014.

Exercice 2 : les cartes

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements : F : « la carte est une figure » et R : « la carte est rouge ».

1. Les évènements F et R sont-ils incompatibles ? Justifier.
2. Définir par une phrase les évènements $F \cup R$ et $F \cap R$ et les entourer sur la figure ci-contre.
3. Combien l'événement $F \cup R$ a-t-il d'issues ?
4. Combien l'événement $\overline{F} \cap R$ a-t-il d'issues ?

<ins>Rappel :</ins> les figures sont les valets, dames et rois.



Exercice 3 : la classe d'Asma

Dans la classe d'Asma, la répartition des élèves est donnée par le tableau ci-dessous

	Filles	Garçons
Musiciens	7	4
Non musiciens	5	14

On choisit au hasard un élève.

1. Combien y a-t-il d'issues à cette expérience ?
2. On note M l'événement : « l'élève est musicien-ne », combien a-t-il d'issues ?
3. Décrire l'événement $\overline{M}$, combien a-t-il d'issues ?
4. On note F l'événement « l'élève est une fille » , réaliser un schéma de Venn qui illustre la situation.
5. Décrire l'événement $F \cap M$, combien a-t-il d'issues ?
6. Combien l'événement $F \cup M$ a-t-il d'issues ?
7. Noter l'événement : « l'élève est un garçon musicien ».
8. Combien y a-t-il d'éléments dans $\overline{F} \cap \overline{M}$?

Exercice 5: on cherche !

On demande à chacune des personnes d'un groupe de 35, si elle s'intéresse au cinéma ou au théâtre. 22 personnes s'intéressent au cinéma et 17 personnes s'intéressent au théâtre, 8 ayant répondu être intéressées par les deux. On choisit au hasard une personne de ce groupe, on note C : « la personne s'intéresse au cinéma » et T: « la personne s'intéresse au théâtre ». Combien d'issues contient l'événement $\overline{C} \cap \overline{T}$?

Quelques remarques :

● L'exercice 1 de la fiche d'exercices permet de travailler la notion d'univers et démontrer qu'il dépend de la description de l'expérience aléatoire.
Nous sommes dans un cas où l'univers peut être décrit de deux manières différentes.
On peut considérer que l'univers est l'ensemble des 16 cartons auquel cas on est dans une situation d'équiprobabilité ou encore que l'univers est l'ensemble des lettres différents soit {A,M,R,Y,I,Z,K,H} et on n'est plus en situation d'équiprobabilité.
Pour faciliter la description des événements on peut choisir de numéroter les cartes :
$\boxed{M_1}$ $\boxed{A_1}$ $\boxed{R_1}$ $\boxed{Y_1}$ $\boxed{A_2}$ $\boxed{M_2}$ $\boxed{M_3}$ $\boxed{I_1}$ $\boxed{R_2}$ $\boxed{Z_1}$ $\boxed{A_3}$ $\boxed{K_1}$ $\boxed{H_1}$ $\boxed{A_4}$ $\boxed{N_1}$ $\boxed{I_2}$

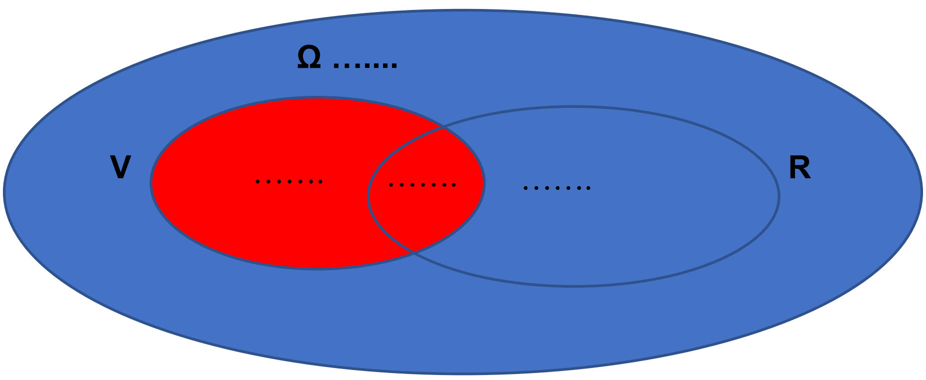
● L'exercice 5 permet d'aborder l'utilisation d'un diagramme de Venn déjà abordé par nos élèves lors du chapitre sur proportion de proportion.

On peut proposer des exercices qui travaillent le passage d'un tableau à un diagramme de Venn.

Exemple :
À l'occasion d'une cérémonie, un pâtissier confectionne un assortiment de gâteaux dont la répartition est donnée dans le tableau ci-dessous:

	Éclairs	**Religieuses**	**Total**
Chocolat	117	43	160
Vanille	39	41	80
Total	156	84	240

On choisit au hasard un de ces gâteaux et on s'intéresse aux événements suivants :
V : « le gâteau est à la vanille. »
R: « le gâteau est une religieuse. »
Compléter le diagramme ci-dessous



●Il est aussi nécessaire d'aborder l'utilisation des arbres des possibles qui n'est pas un attendu du programme de collège et qui est loin d'être évidente pour la plupart des élèves. Voici quelques propositions :

Exercice 1 anagramme

Dans un sachet opaque, on dispose de 4 cartes indiscernables au toucher

M A T H

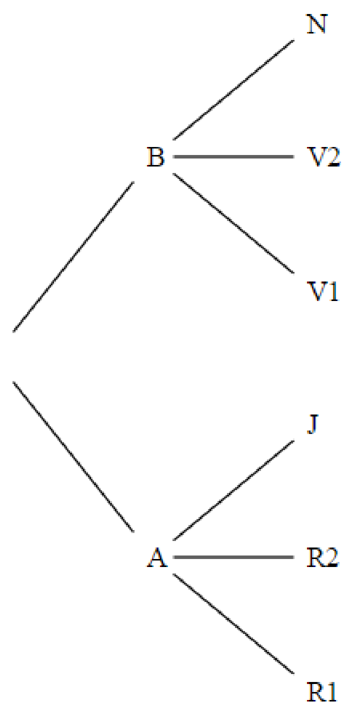
Dans chaque cas, déterminer combien d'éléments possèdent l'univers de l'expérience aléatoire décrite :

1. On tire au hasard une carte et on note la lettre.
2. On tire au hasard une carte, on note la lettre, on remet la carte dans le sachet, on retire une carte et on note la lettre à la droite de la lettre précédente.
On dit qu'on a tiré successivement et avec remise deux cartes.
3. On tire successivement et sans remise deux cartes.
4. On tire successivement et sans remise trois cartes.
5. On tire successivement et sans remise quatre cartes.

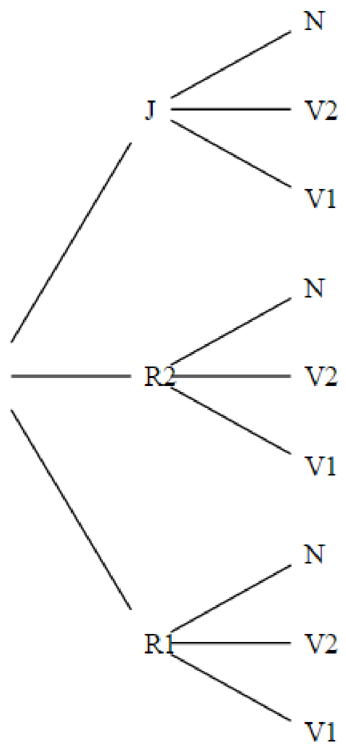
Exercice 2:

un sac A contient 2 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher et un sac B contient 2 boules vertes et une boule noire indiscernables au toucher.

On donne ci-dessous deux arbres des possibles. Décrire pour chaque arbre une expérience aléatoire qu'il modélise.



Arbre 1



Arbre 2

2. La notion de probabilités :

On est tous confronté dans nos classes de seconde à l'utilisation répétée du mot « chance » de la part des élèves. Elle s'explique en partie par son emploi dans les activités proposées pour introduire ou travailler les probabilités.
Ainsi, au brevet des collèges (Polynésie- septembre 2022) on peut lire cet énoncé :
« *Une urne contient 20 boules rouges, 10 boules vertes, 5 boules bleues et 1 boule noire. Un jeu consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne. Lorsqu'un joueur tire une boule noire, il gagne 10 points. Lorsqu'il tire une boule bleue, il gagne 5 points. Lorsqu'il tire une boule verte, il gagne 2 points. Lorsqu'il tire une boule rouge, il gagne 1 point. 1. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne. (….) A-t-il plus de chance de gagner 2 points ou de gagner 5 points ?* »
Comment l'élève peut-il rédiger la réponse ? Que penser d'une formulation du type : « on a 10 chances sur 36 de gagner 2 points. » ? Dans ce cas, les chances semblent désigner les cas favorables. Mathématiquement parlant, il est tout aussi juste d'écrire : « on a 5 chances sur 18 de gagner », mais alors que désigne le mot « chances » ? On pourrait aussi trouver comme réponse: « il y a environ 28% de chance de gagner » et alors le mot « chance » désigne la grandeur dont on prend les 28%, c'est à dire 1, la probabilité de l'univers.
On sait aussi l'ensemble des réactions que cela peut engendrer comme « de toute façon, je n'ai pas de chance, je ne gagne jamais ».

Il est donc préférable d'éviter ce genre de formulation, il faut mettre en place de manière rigoureuse le calcul des probabilités et amener les élèves à distinguer l'événement, de son cardinal et de sa probabilité.

Mise en œuvre de la situation « Lego ou punaise? »

Notions traitées : modéliser une expérience aléatoire, déterminer une probabilité dans le cas d'une situation d'équiprobabilité ou s'y ramenant, loi des grands nombres.

Connaissances et capacités attendues à la fin de la séquence :

- Modéliser des expériences aléatoires
- Calculer des probabilités dans le cas d'une situation d'équiprobabilité
- Conjecturer une probabilité à l'aide de la loi des grands nombres

Objectifs de l'enseignant :

- Mettre en place les notations et les formulations attendues.
- Mettre en place les deux « définitions » d'une probabilité comme limite de fréquence ou dans le cas d'une situation d'équiprobabilité.

Pré-requis nécessaires : calculer une fréquence

Déroulement prévu :
Étape 1 :
On démarre par une série d'exercices qui permettent d'amorcer ce travail. On y travaille le fait que le hasard n'a pas de mémoire, on aborde l'ambiguïté de l'utilisation du mot « chance » et on met en avant les deux types de détermination d'une probabilité. Le premier est celui qui peut se ramener à une situation d'équiprobabilité ou à un modèle de référence (dé, urne etc.) et le second qui ne s'y ramène pas comme le lancer d'une punaise ou d'une brique de Lego.

Organisation pédagogique : travail individuel, l'énoncé sera projeté au tableau.

Consigne :

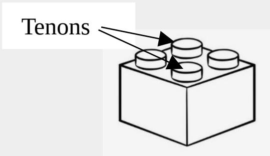
Exercice 1 :
Maxence s'exclame : « J'ai la poisse ! Quand je joue avec un dé, je n'obtiens quasiment jamais le 6 ! ».
Sa petite sœur Amy lui répond « : « Tu n'as qu'à le lancer 6 fois, tu seras sûr d'en obtenir un ! ». Que penses-tu de cet échange ?

Exercice 2 :
Lila et ses copains jouent au « Trivial Pursuit ». Lila vient d'obtenir quatre fois de suite le 1 avec le dé. Elle se plaint de ne pas avoir de chance.
Ses amis lui répondent : « Comme tu as obtenu quatre fois le 1, tu es quasiment sûre que la prochaine fois, ça ne sera pas le cas. » Que penses-tu de cet échange ?

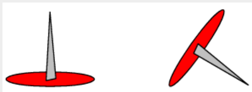
Exercice 3 :
Dans chaque cas, détermine si tu es capable de répondre à la question avec les informations données et :

- Si oui, réponds.
- Si non, pourquoi n'en es tu pas capable ?

1. Je jette une pièce de monnaie non truquée. Combien ai-je de chances d'avoir « Pile » ?
2. Je lance un dé classique (non truqué) et on regarde le numéro obtenu sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir « 2 » ?
3. Je lance un dé classique (non truqué). Combien ai-je de chances d'obtenir un numéro pair sur la face du dessus ?
4. Une urne contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. Je tire une boule (sans regarder !) Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?
5. On lance une brique de Lego et on regarde la face du dessus. Quelle est la probabilité que ce soit la face avec les « tenons » ?



6. En considérant la même « expérience » que dans la question **4**, combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?
7. Je lance une punaise. Elle peut tomber sur le dos ou sur la pointe comme dans le schéma ci-dessous. Combien ai-je de chances que la punaise tombe sur la pointe ?



Exercice 4:
Lors d'un entraînement de football, Amandine et Elise font une séance spécifique de tirs de coups francs. Amandine a tiré 28 coups francs et a marqué 18 fois, Elise a réussi 27 tirs sur les 39 qu'elle a tentés. Quelle est la joueuse la plus adroite?

Remarques :

- Ces exercices sont l'occasion de lever certains malentendus en évoquant notamment la mémoire du hasard pour les deux premiers. On sait ce qui peut arriver mais il est impossible de prévoir ce qui va arriver.

- L'exercice 3 a deux objectifs :
- Clarifier la rédaction et éviter l'utilisation du mot « chance » dans les réponses à ces exercices. On pourra demander aux élèves de reformuler certaines questions et on travaillera la rédaction des réponses.
- Distinguer les exercices qui relèvent de cas d'équiprobabilité et de modèles de référence (questions 1,2,3,4 et 6) et ceux où il n'y a pas d'éléments de symétrie qui permettent de se ramener à un modèle de référence ou à une situation d'équiprobabilité (questions 5 et 7).

- On demande aux élèves comment ils procéderaient pour répondre aux questions 5 et 7. Certains ont déjà fait ce type de travail au collège et propose de faire des tests.
- L'exercice 4 permet de retravailler la notion de fréquence nécessaire à l'étape 2.

Étape 2: Comment déterminer une probabilité qui ne relève pas de cas d'équiprobabilité ou de modèles de référence ?

Nous proposons deux versions de cette étape: une qui permet de déterminer la probabilité qu'une brique de Lego tombe sur les tenons et une qui permet de déterminer la probabilité qu'une punaise tombe sur la pointe.

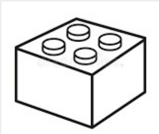
Organisation pédagogique : travail en binôme, la fiche est distribuée à chaque élève.

Matériel : Chaque groupe dispose d'une brique de Lego ou d'une punaise. Pour la punaise, on propose aux élèves de la mettre dans un gobelet, de retourner le gobelet et de constater la position de la punaise. Cela évite de voir les punaises finir au sol.

Consigne :

Étape 2: avec une brique de Lego *D'après « Des maths ensemble et pour chacun »*

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'exercice 3, une brique de Lego lancée au hasard sur une table peut tomber sur la base, sur un des quatre côtés ou sur les tenons. Nous allons nous intéresser à la probabilité p de l'évènement T : « tomber sur les tenons ».

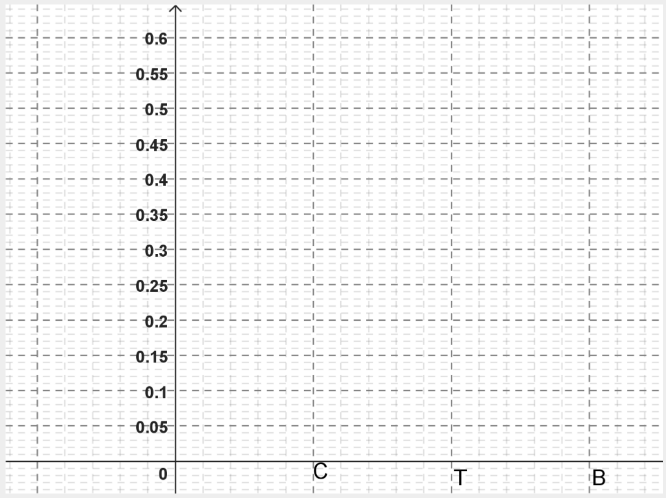


Cette probabilité est fortement liée à la forme et à l'équilibre de la brique et ne peut pas être prédite facilement. Nous allons donc effectuer nous-même une grande quantité de lancers et observer si on peut estimer la probabilité p de la brique de Lego de tomber sur ses tenons.
L'expérience consiste à lâcher (d'une hauteur de 30 cm environ) une brique de Lego au dessus de la table et à observer sur quelle « face » elle retombe.
Quel est l'univers de cette expérience ?…………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
Quelle valeur de p proposeriez-vous spontanément ? $p \approx$ ……………….

1. Réalisation d'un échantillon de taille 25 en binôme ; lancez vingt cinq fois la brique, notez le nombre de fois où vous avez obtenu les différentes issues C,T ou B et calculez leurs fréquences.

	C	T	B
Effectifs			
Fréquence			

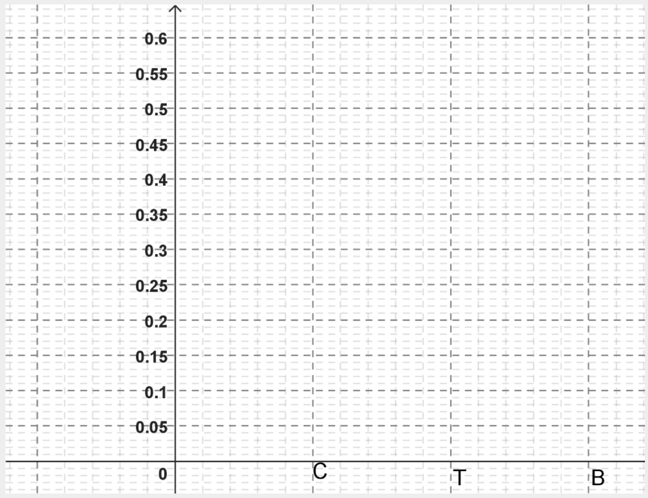
Représenter la distribution des fréquences par un diagramme en bâtons:



2. Effectuer 25 lancers supplémentaires que l'on ajoute aux précédents : on a un échantillon de taille ……….

	C	T	B
Effectifs			
Fréquence			

Représenter la distribution des fréquences par un diagramme en bâtons:

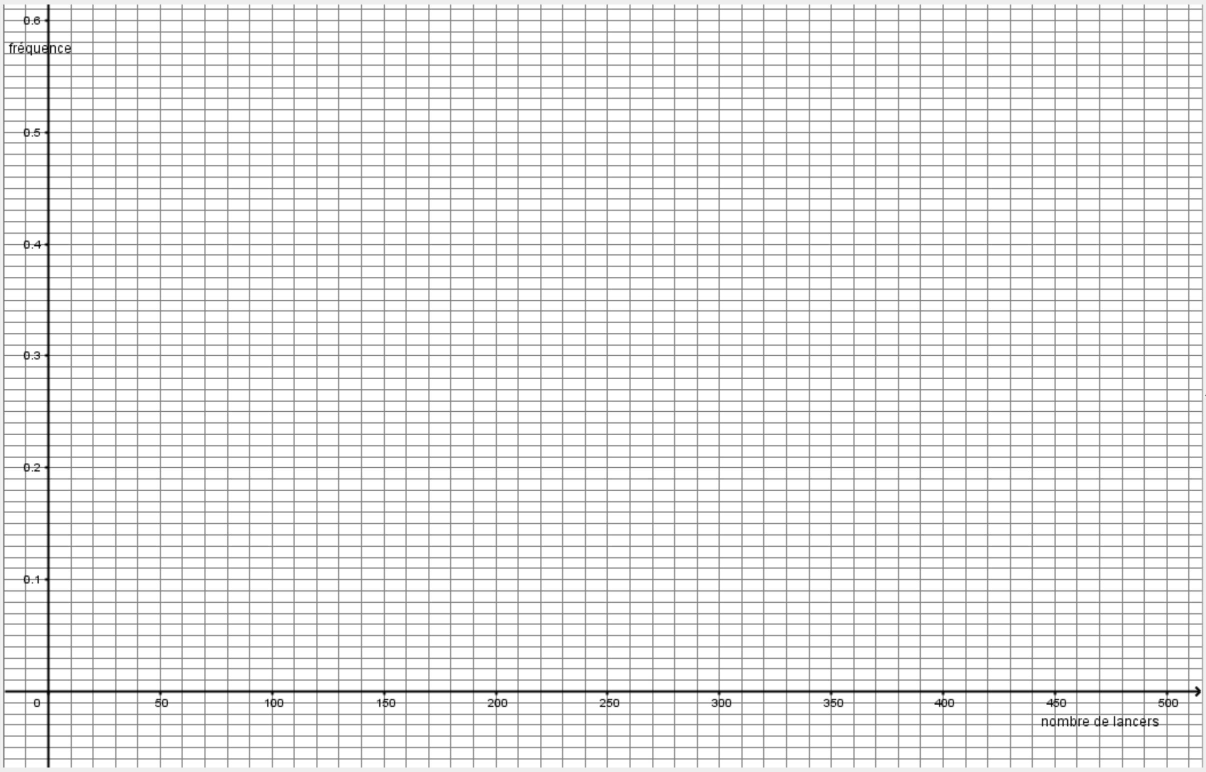


3. Mise en commun :

a. On cumule tous les résultats des élèves de la classe ,

Nombre total de lancers	50	100	150	200	250	300	350	400
Nombres de réalisations de T								
Fréquence de réalisation de T								

b. Remplir ce graphique au fur et à mesure sur les tirages qui donne la fréquence de l'issue T.



4. Observations après la mise en commun :

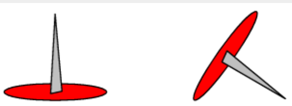
a. Que constatez-vous en comparant les résultats des différents groupes ?

b. Comment semble évoluer la fréquence de réalisation de T quand le nombre de lancers augmente ?

Bilan : Quelle valeur de p proposez-vous à présent ? $p \approx$ ....

Étape 2 version B: avec une punaise

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'exercice 3, une punaise lancée au hasard sur une table peut tomber sur le dos ou sur la pointe. Nous allons nous intéresser à la probabilité p de l'évènement E : « tomber sur la pointe ».



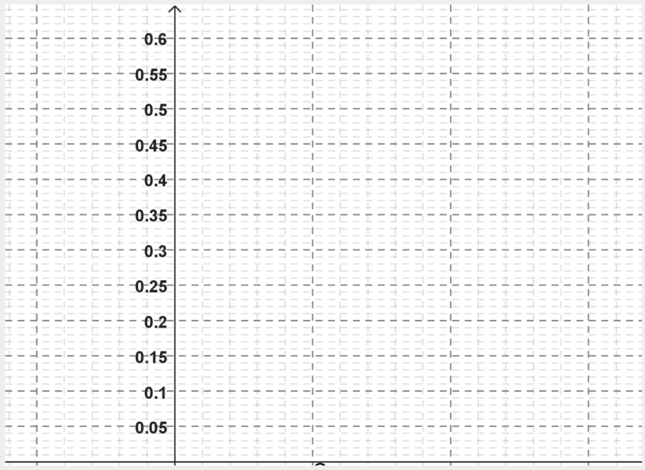
Cette probabilité est fortement liée à la forme et à l'équilibre de la punaise et ne peut pas être prédit facilement. Nous allons donc effectuer nous-même une grande quantité de lancers et observer si on peut estimer la probabilité la punaise de tomber sur la pointe.

Quelle valeur de p proposeriez-vous spontanément ? $p \approx$ ....

1. Réalisation d'un échantillon de taille 25 en binôme ; lancez vingt cinq fois la punaise, notez le nombre de fois où vous avez obtenu les différentes issues et calculez leurs fréquences.

	E	T
Effectifs		
Fréquence		

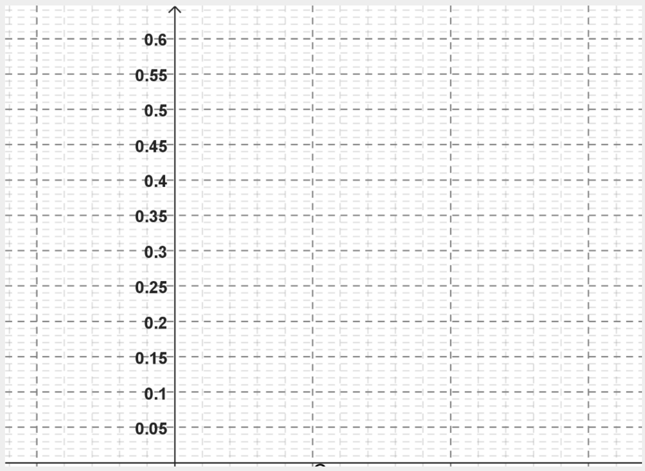
Représenter la distribution des fréquences par un diagramme en bâtons:



2. Effectuer 25 lancers supplémentaires que l'on ajoute aux précédents : on a un échantillon de taille ……….

	E	T
Effectifs		
Fréquence		

Représenter la distribution des fréquences par un diagramme en bâtons:

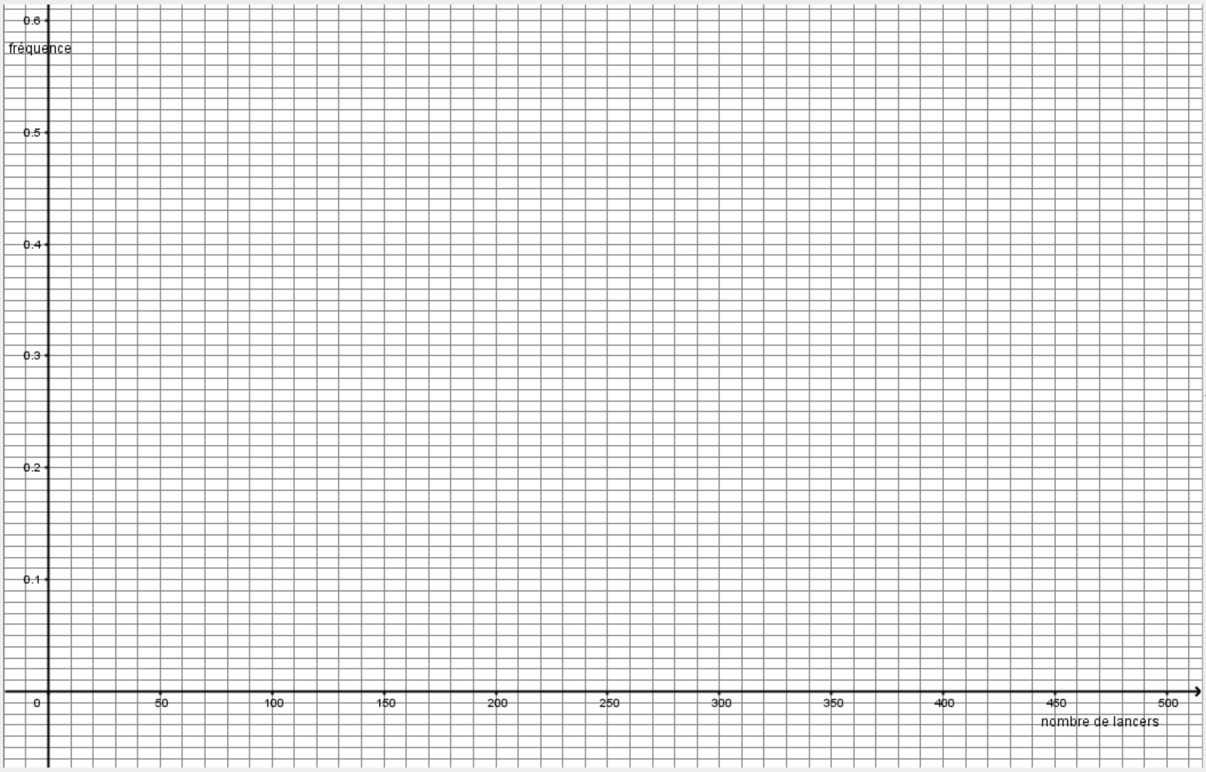


3. Mise en commun :

a. On cumule tous les résultats des élèves de la classe ,

Nombre total de lancers	50	100	150	200	250	300	350	400
Nombres de réalisations de E								
Fréquence de réalisation de E								

b. Remplir ce graphique au fur et à mesure sur les tirages qui donne la fréquence de l'issue E.



4. Observations après la mise en commun :

a. Que constatez-vous en comparant les résultats des différents groupes ?

b. Comment semble évoluer la fréquence de réalisation de B quand le nombre de lancers augmente ?

Bilan : Quelle valeur de p proposez-vous à présent ? $p \approx$ ....

Attention au choix des punaises, si on prend les punaises dont la tête est recouverte d'un plastique coloré, on trouve $p \approx 0{,}5$; par contre si on prend une punaise sans opercule plastique, on trouve $p \approx 0{,}4$.

Remarques:

- Les résultats sont différents si on regarde les résultats obtenus pour un petit nombre de lancers. On en profite pour parler fluctuation et échantillonnage.
- Lorsque le nombre de lancers augmente, la fréquence se stabilise et on peut alors évoquer la loi des grands nombres.

Étape 3 : Institutionnalisation et exercices d'application.

Vous trouverez à la page suivante une proposition de fiche de cours

Calculer des probabilités

I Modélisation d'une expérience aléatoire et probabilité d'un événement:

Modéliser une expérience aléatoire, c'est définir les issues possibles et attribuer à chaque issue un nombre réel de l'intervalle [0;1] appelé probabilité. La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

Issue	x_1	x_2	x_3	…..	x_n
Probabilité	p_1	p_2	p_3	……	p_n

$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$

exemple : On choisit au hasard un client à la caisse d'un supermarché, le tableau suivant donne le temps d'attente à la caisse.

Temps d'attente	2 min	3 min	5 min	6 min	8 min
Probabilité	0,2	p	0,35	0,3	0,1

1. Que vaut p ?
la somme des probas vaut 1 donc 0,2+p+0,35+0,3+0,1=1 donc 0,95 + p =1 donc p=0,05.

2. Quelle est la probabilité que le client attende au moins 5 minutes ?
Elle vaut 0,35+0,3+0,1=0,8
(d'après Variations-2nde)

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui constituent l'événement.

Exemple : Une urne contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule sans regarder et on note sa couleur.

L'univers est l'ensemble des 7 boules contenues dans l'urne. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{7}$.

chaque issue a la même probabilité (cas d'équiprobabilité)

remarque : rédaction
On note J l'événement : « tirer une boule jaune ».
On écrit $P(J)=\frac{3}{7}$.

P(J) signifie : « la probabilité de J ».

*

Mais si on considère l’univers {jaune ; rouge} , on a :

Issue possible	Jaune	Rouge
Probabilité	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

Attribuer les probabilités à chaque issue, c’est donner la loi de probabilité associée à l’expérience.

L’événement « jaune » est formé des trois boules jaunes. Donc la probabilité de tirer une boule jaune est $\frac{3}{7}$.

Sur cet univers, il n’y a plus équiprobabilité.

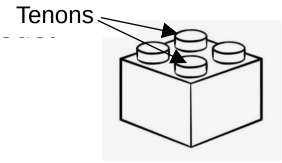
Pour déterminer une loi de probabilité, dans certains cas (lancer de pièces, jet de dés, urnes etc.) , on peut utiliser le modèle d’équiprobabilité.
En situation d’équiprobabilité, la probabilité P(A) d’un événement quelconque A est

$$P(A)=\frac{\text{nombre d'issues qui constituent A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

II Modèle probabiliste à partir de fréquences observées :

Que se passe-t-il dans les cas où l’on ne peut pas se ramener à une situation d’équiprobabilité ?

Exemple : On lance une brique de Lego et on regarde la face du des
Quelle est la probabilité que ce soit la face avec les « tenons » ?



Pour estimer cette probabilité, on peut faire des expériences.

Si on reproduit une expérience aléatoire n fois, on dit qu’on réalise un échantillon de taille n .
Exemple : on lance 10 fois un dé cubique. On réalise un échantillon de taille 10 de l’expérience : « lancer un dé cubique ».

La fréquence observée d’un événement :
C’est le rapport du nombre de fois que l’événement est arrivé sur le nombre total d’expériences réalisées.

En lançant 10 fois un dé cubique, on obtient 3 fois le nombre « 6 ». Quelle est la fréquence de l’événement « obtenir 6 » dans cet échantillon ?
La fréquence vaut $\frac{3}{10}$.

Propriétés : loi des grands nombres :
La fréquence d’un événement fluctue selon les « échantillons » ; Elle dépend aussi de la taille de l’échantillon (c'est-à-dire du « nombre de tirages »).
Lorsque la taille de l’échantillon augmente, la fluctuation de la fréquence devient plus faible ; autrement dit la fréquence se stabilise. On admet que lorsque la taille de l’échantillon est grande, la fréquence de réalisation d’un événement est proche de la probabilité de cet événement.

Cette méthode permet d'estimer la probabilité d'un événement à partir des fréquences observées.
Exemple : On lance une brique de Lego et on regarde la face du dessous.
Les issues possibles sont :

- C : « elle tombe sur un des quatre côtés »;
- T : « elle tombe sur les tenons »;
- B : « elle tombe sur la base ».

Pour choisir les probabilités des issues , on a lancé 600 fois une brique dans la classe et on a obtenu :

Issues	C	T	B
Fréquences	$\frac{178}{600}$	$\frac{239}{600}$	$\frac{183}{600}$

On peut donc **choisir** les probabilités : $P(C) = \frac{178}{600}$ $P(T) = \frac{239}{600}$ et $P(B) = \frac{183}{600}$
Ou des valeurs approchées de ces fréquences, en prenant soin que la somme de ces valeurs approchées vaillent 1 : $P(C) = 0{,}3$ $P(T) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}3$

- ***Exercice pour distinguer des situations d'équiprobabilité et des situations qui n'en sont pas***

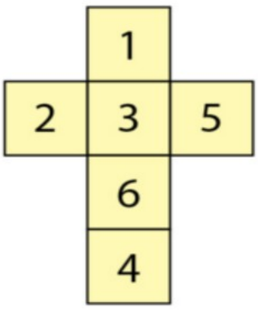
On dispose de six dés à six faces numérotées de 1 à 6.
Dé 1 : dé équilibré
Dé 2 : dé truqué selon les modalités suivantes :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

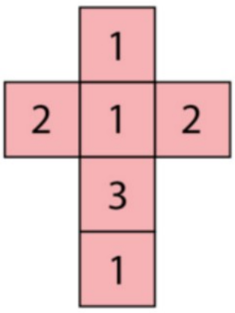
Dé 3 : dé truqué selon les modalités suivantes :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,15	0,05	0,2	0,05	*p*	0,3

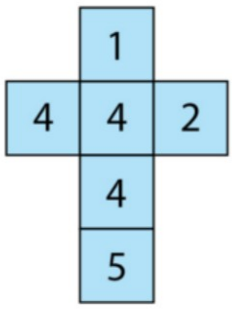
Dé 4 :



Dé 5 :



Dé 6 :



On lance le dé et on note le numéro obtenu sur la face supérieure.
Quel dé faut-il choisir pour que la probabilité d'obtenir un chiffre impair soit la plus grande ?

D'après Hyperbole 2de, Nathan

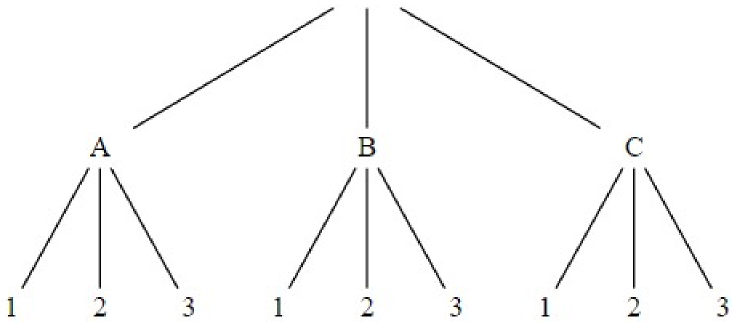
➢ *Exercices qui utilisent un arbre des possibles*

Exercice 1:
Un code d'ouverture est composé d'une lettre A, B ou C suivie d'un chiffre 1,2,3. On choisit une lettre au hasard puis un chiffre au hasard.
1.Quel est l'univers de cette expérience ?
2.Nadia compose un code au hasard, quelle est la probabilité qu'elle obtienne le bon code ?

Métamaths 2de, Belin

On peut modéliser l'univers à l'aide d'un arbre des possibles.

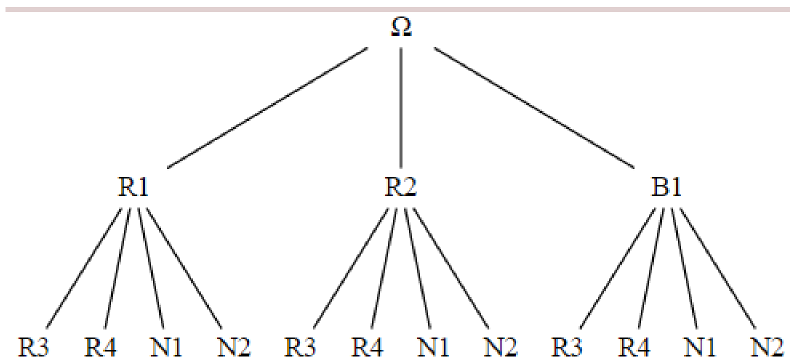
*



Il y a 9 issues équiprobables donc la probabilité d'avoir le bon code est de $\frac{1}{9}$.

Exercice 2: On dispose de deux sacs ; le sac A contient 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 et un jeton blanc numéroté 1, le sac B contient 2 jetons rouges numérotés 3 et 4 et 2 jetons noirs numérotés 1 et 2.
On tire un jeton dans le sac A puis un jeton dans le sac B . Quelle est la probabilité de tirer deux jetons rouges ?

On modélise avec un arbre des possibles :



$$P(R_1R_3)+P(R_1R_4)+P(R_2R_3)+P(R_2R_4)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Il n'est pas question d'introduire les arbres pondérés qui n'ont de sens qu'avec la définition d'une probabilité conditionnelle. Or cette notion n'est abordée qu'en première. La maîtrise des probabilités conditionnelles est indispensable à l'utilisation des arbres pondérés du fait de la définition de ces derniers.

Les auteurs du fascicule « Probabilités en première , arbres et jeux » de l'IREM de Poitiers ont étudié l'arrivée des arbres dans les programmes scolaires et ont conclu : « (…) *l'étude des programmes depuis une quarantaine d'années montre comment les arbres probabilistes, conçus d'abord comme un moyen parmi d'autres pour enseigner les probabilités, sont devenus un objet d'enseignement incontournable ne serait-ce que pour répondre aux questions posées au baccalauréat. Ils sont d'abord apparus (si on omet les arbres de dénombrement) pour calculer des probabilités en cas d'épreuves répétées (en particulier dans le schéma de Bernoulli) puis dans les calculs utilisant des probabilités conditionnelles. À regarder les manuels actuels, il n'y aurait même que les arbres pour enseigner les probabilités conditionnelles. Or il en est tout autrement.* »

L'utilisation de ces arbres n'a rien de naturel pour les élèves, il faut profiter de la classe de seconde pour travailler l'arbre des possibles sans brûler les étapes.

Bibliographie et sources :

Enseigner les probabilités en classe de terminale – IREM de Strasbourg – mars 1994

Introduction du concept de probabilité conditionnelle: avantages et inconvénients de l'arborescence – André TOTOHASINA – Repère n°15 (avril 1994)

Une initiation aux probas par les jeux - IREM de Rouen – septembre 2009

Les mathématiques vivantes au lycée, Fascicule 2, Probabilités en première- IREM de Poitiers- octobre 2018

HENRY M., 1999, L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, Repères IREM N° 36.

À propos de l'introduction aux probabilités en Troisième : Brigitte Chaput et Claudine Vergne Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités - 18 juin 2010

Des maths ensemble et pour chacun- JEAN-PHILIPPE ROUQUÈS ; LAETITIA VALADE et CHRISTOPHE GRAGNIC – Canopé Editions- 2019

Bibm@th.net