Bases d'exercices à destination des enseignants du secondaire

Intervalles de confiance - Intervalles de fluctuation - Prises de décision

IREM Bordeaux - groupe Probabilités et Statistique - 2013

... ces exercices ne sont pas forcément à destination des élèves

Exercice 1. On dispose d'un médicament efficace dans le traitement d'une maladie dans 80% des cas. Une variante de ce médicament est testée, et on observe 32 guérisons sur 50 patients. Peut-on considérer que cette variante a aussi une efficacité de 80% au seuil 95 % ?

Exercice 2. On dispose d'un médicament efficace dans le traitement d'une maladie dans 80% des cas. Une variante de ce médicament est testée, et on observe 35 guérisons sur 50 patients. Peut-on supposer que cette variante a aussi une efficacité de 80% au seuil 95 % ?

Exercice 3. On dispose d'un médicament efficace dans le traitement d'une maladie dans 80% des cas. Une variante de ce médicament est testée, et on observe 35 guérisons sur 50 patients. Peut-on supposer que cette variante a la même efficacité que le médicament d'origine au seuil 95 % ?

Exercice 4. Un fabriquant d'objets annonce que 10% de sa production est défectueuse. Un statisticien prend un lot de 60 pièces. Sur ces 60, 8 sont défecteux.
Est-ce cohérent à un seuil de 95% avec l'annonce faite ?
Si le statisticien choisit un lot de 20 pièces, et trouve 3 défectueux, peut-on appliquer la même procédure ?

Exercice 5. En septembre 2005, 13% des Talençais prennent la ligne B au moins une fois par semaine
En février 2006, une enquête a été effectuée auprès de 200 Talençais. 36 d'entre eux ont déclaré prendre la ligne B au moins une fois par semaine.
Peut-on dire au seuil 95% que la plus grande fiabilité de la ligne a entrainé une hausse de sa fréquentation par les Talençais ? Même question avec un seuil 99% ?

Exercice 6. Une enquête a été effectuée auprès de 200 Talençais en septembre 2005 et février 2006. En septembre 13 % des personnes prenaient la ligne B au moins une fois par semaine, leur nombre s'élève à 36 sur 200 en février. Dans le même temps le nombre de pannes survenues sur la ligne a diminué de 26%. Les données permettent-elles d'appliquer la technique de prise de décision (par intervalle de fluctuation) ?

Exercice 7. Un laboratoire annonce que l'un de ses médicaments est efficace à 95%. On teste cette affirmation, et on obtient que sur un échantillon de 400 personnes traitées, le traitement a été efficace pour 369 d'entre elles. Peut-on accepter l'affirmation du laboratoire au seuil 0.99 ? Au seuil 0.9 ?
A partir de quel seuil commence-t-on à rejeter l'affirmation ?

Exercice 8. On dispose d'un médicament efficace dans le traitement d'une maladie dans 80% des cas. Une variante de ce médicament est testée, et on observe 43 guérisons sur 50 patients. L'efficacité de cette variante est-elle différente de celle du médicament d'origine au seuil 95 % ? Jusqu à quel seuil peut-on dire que la variante a eu un effet ?

Exercice 9. Dans une commune, en 2001, on a enregistré 418 naissances de garçons et 388 naissances de filles. Le maire annonce "Dans ma commune, il naît autant de filles que de garçons."
Dans tout le pays, en 2001, 41800 garçons et 38800 filles sont nés. Le président annonce "Dans mon pays, il naît autant de filles que de garçons."
L'un des deux élus a une formation en statistiques, peut-on deviner lequel ?

Exercice 10. On mesure le poids de 100 paquets de café. On trouve que 8 d'entre eux pèsent moins de 250 grammes.

(1) Le fabricant de café déclare que 7% de ses paquets de café contiennent en fait moins de 250 grammes. Les observations sont-elles compatibles au seuil 95% avec cette affirmation ?
(2) Une association de consommateurs affirme que ce sont en fait 10% des paquets qui pèsent moins de 250 grammes. Les observations sont-elles compatibles au seuil 95% avec cette deuxième affirmation ?

(3) Combien faudrait-il peser de paquets de café pour être sûr de rejeter au seuil de 95% au moins l'une des deux affirmations précédentes ?

Exercice 11. On effectue un sondage auprès de 400 électeurs et on obtient 212 intentions de vote en faveur d'un candidat C.
Donner au risque $\alpha = 0.05$, un intervalle de confiance des intentions de vote en faveur de C dans la population entière.

Exercice 12. Un biologiste veut évaluer la proportion p de drosophiles à yeux rouges dans une population de drosophiles. Il prend un échantillon de 80 drosophiles et observe 12 drosophiles aux yeux rouges. Avec une autre population soumise à des conditions différentes, il observe dans un échantillon de même taille une proportion de 0.25.
Donner les intervalles de confiance pour les proportions de drosophiles à yeux rouges dans les deux populations au niveau de confiance 95%.

Exercice 13. Un biologiste veut évaluer la proportion p de drosophiles à yeux rouges dans une population de drosophiles. Il prend un échantillon de 80 drosophiles et observe 12 drosophiles aux yeux rouges. Avec une autre population soumise à des conditions différentes, il observe dans un échantillon de même taille une proportion de 0.25. Il déclarera que ces conditions ont un effet significatif si les deux intervalles de confiance sont disjoints. Quelle sera sa conclusion ?

Exercice 14. On cherche à tester l'efficacité d'un médicament. Pour cela, on prend une population de 100 moutons malades auxquels on fait suivre le traitement, et on observe que 63 d'entre eux sont guéris au bout de deux semaines. Donner au niveau de confiance 0.95 un intervalle de confiance pour la proportion de moutons guéris après un traitement de 2 semaines.
Sur combien de moutons faudrait-il faire le traitement pour obtenir au niveau de confiance 0.95 un intervalle de confiance d'amplitude 0.01 ?

Avec un deuxième traitement sur une autre population de 80 moutons malades, on observe la guérison de 57 moutons. Donner au niveau de confiance 0.95 un intervalle de confiance pour la proportion théorique de guérison avec ce deuxième traitement.
La différence entre les deux traitements est-elle significative ?

Exercice 15. Une enquête a été effectuée auprès de 200 Talençais en septembre 2005 et février 2006. En septembre 13 % des personnes prennent la ligne B au moins une fois par semaine, leur nombre s'élève à 55 sur 200 en février. Dans le même temps le nombre de pannes survenues sur la ligne a diminué de 26%.
Peut-on dire au seuil 95% que la plus grande fiabilité de la ligne a entrainé une hausse de sa fréquentation par les Talençais

---

Exercice 16. Une audimétrie a permis d'établir, avec un niveau de confiance de 95%, que l'audience d'une émission télévisée était dans l'intervalle [35%, 45%]. Afin d'affiner la mesure, on décide de sonder des téléspectateurs. Combien faut-il en sonder au minimum pour que, avec le même niveau de confiance de 95%, et, en supposant que l'on obtienne la même estimation ponctuelle de 40% d'audience, on ait un intervalle de confiance de longueur 2% au lieu de 10% ?

Exercice 17. Un quotidien publie la cote du chef de l'état à partir d'un sondage réalisé auprès de 1000 personnes. Au mois de janvier la cote était de 38% d'opinion favorables, en février 36%. Et le journaliste de commenter ≪ le chef de l'état perd 2 points ≫.
Commenter ce commentaire.

Exercice 18. On veut construire sur un campus universitaire deux restaurants : le RU1 de N_1 places et le RU2 de N_2 places. On suppose que n étudiants prendront leur repas dans l'un de ces deux restaurants. On prévoit que les étudiants choisiront le RU1 avec une probabilité p et dans le RU2 avec une probabilit(́e $1-p$. Leurs choix sont indépendants. On suppose enfin que $n \geqslant 200$.

(1) On note X_n le nombre d'étudiants choisissant le RU1 pour un repas donné. Déterminer la loi de X_n.

(2) Écrire l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n au seuil de $0,95$ de la variable $\frac{X_n}{n}$.

(3) L'administration désire que les n étudiants trouvent une place dans le RU de leur choix avec une probabilité d'au moins $0,95$ à $0,01$ près.

Déterminer l'intervalle J_n dans lequel doit se trouver $\frac{X_n}{n}$ avec une probabilité d'au moins $0,94$.

(4) On suppose que les conditions sont réunies pour que l'on puisse utiliser l'approximation $P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) \simeq 0,95$ à $0,01$ près (ce qui est vrai si $n \geqslant 200$).

Vérifier que si $I_n \subset J_n$ alors $P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geqslant 0,94$.

(5) Traduire sous forme de deux inégalités l'inclusion précédente.

(6) Application numérique :

(a) On suppose que $p = 0,5$ et $n = 1000$. Quelle est la taille minimale des deux RU ?

(b) On suppose que $p = 0,3$ et $n = 1000$. Quelle est la taille minimale des deux RU ?

(c) On suppose que $p = 0,5$, $N_1 = N_2 = 500$. En utilisant une inéquation du second degré, déterminer le nombre maximum d'étudiants qui pourront trouver une place.