L'outil permet de vérifier la maîtrise de la méthode , les exercices sont des applications plus ou moins directes de la méthode.

Outil 0 : utiliser un graphique pour vérifier ou établir une inégalité

Soit x un nombre strictement positif, comparer x , $\sqrt{x}$, x^2 et $\frac{1}{x}$ suivant les valeurs de x à partir de la représentation graphique des fonctions correspondantes.

Exercice 1 :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+1$. résoudre graphiquement $f(x)\geqslant g(x)$.

Outil 1 : étudier le signe d'un produit

1. Étudier le signe de $(x-1)(2x+3)$ suivant les valeurs de x
2. Étudier le signe de $(x-1)(2x+3)-(x-1)^2$ suivant les valeurs de x .
3. Étudier le signe de $(x-2)(\ln x-1)$ suivant les valeurs de x

Outil 2 : se ramener à étudier le signe d'une différence

1. Comparer x et $\sqrt{x}$ suivant les valeurs de x , où x est un réel strictement positif.
2. Comparer x et x^2 suivant les valeurs de x , où x est un réel quelconque.
3. Comparer x et $\frac{1}{x}$ suivant les valeurs de x , où x est un réel non nul .

Exercice 2 :

1. On considère un réel $x\geqslant 1$, montrer que $(x+1)^2\geqslant x^2+3$.
2. Montrer que pour tout réel x , $x^2-4x>-5$.
3. Montrer que pour tout réel x , $x^2-8x+2>2x-30$.

coup de pouce 1

Exercice 3 : Étudier par le calcul la position relative de deux courbes

soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g .

coup de pouce 2

Outil 3 : utiliser les opérations sur les inégalités et les fonctions de référence
Rappel de cours :
on considère 4 réels a , b , c et d et vérifiant $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$

- pour tout réel k, $a+k\leqslant b+k$
- pour tout réel k, $a-k\leqslant b-k$
- $a+c\leqslant b+d$
- pour tout réel k positif $ak\leqslant bk$
- pour tout réel k négatif, $ak\geqslant bk$
- si a , b , c et d sont positifs alors $ac\leqslant bd$
- pour tout réel k strictement positif, $\frac{a}{k}\leqslant\frac{b}{k}$
- pour tout réel k strictement négatif, $\frac{a}{k}\geqslant\frac{b}{k}$
- si a et b sont positifs , alors $a^2\leqslant b^2$
- si a et b sont négatifs, $a^2\geqslant b^2$
- si a et b sont strictement positifs, $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$
- si a et b sont strictement négatifs, $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$
- si a et b sont positifs alors $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$
- pour tout réel k positif , si $a\geqslant b$ alors $a+k\geqslant b$

1. démontrer que pour tout réel $x\geq 2$, $\sqrt{3x^2+2}\geqslant 2$

coup de pouce 3

2. Soit x un réel tel que $-2\leqslant x\leqslant -1$, déterminer un encadrement de $3x^2+2$

3. on considère un réel $t\geqslant 2$, montrer que $\frac{t^3}{3}+t^2-8t\geqslant\frac{-28}{3}$

coup de pouce 4

Exercice 4: comment trouver la limite d'une suite en utilisant le théorème des comparaisons ?
u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^3+n-6$
a. Démontrer que pour tout $n\geqslant 6$, $u_n\geqslant n^3$.
b. En déduire la limite de u.

coup de pouce 5

Exercice 5 : comment trouver la limite d'une suite en utilisant le théorème des comparaisons ?
1. $v_n=n^2+10n+3$ 2. $w_n=n+(n+3)^8$ 3. $z_n=3n+\sqrt{n^2+3n+8}$

coup de pouce 6

Exercice 6 : comment trouver la limite d'une suite en utilisant le théorème des comparaisons ?

1. $u_n = n^2 + \sin(3n)$ 2. $v_n = \sqrt{n^4 + 3n}$ 3. $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^3}$

coup de pouce 7

Exercice 7 : démontrer l'hérédité d'une proposition

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$, démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 3$.

coup de pouce 8

Exercice 8 : démontrer l'hérédité d'une proposition

u est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n , $u_n \geq n^2$.
en déduire la limite de la suite u .

coup de pouce 9

Outil 4 : utiliser les variations d'une fonction

soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x + 2$

1. Étudier les variations de f
2. En déduire que $f(x) < 4$ pour tout $x \in]-\infty ; 3]$

Exercice 9 :
Montrer que pour tout réel x , $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$

coup de pouce 10

Outil 5 : se ramener à étudier un quotient
Rappel de cours :
soient a et b deux réels strictement positifs , $a \leqslant b$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \leqslant 1$

Prouver que pour tout entier naturel n , $\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}} \geqslant \dfrac{2^{n-1}}{9^{n+1}}$

coup de pouce 11

coup de pouce 1
pour comparer $(x+1)^2$ et x^2+3 , on étudie le signe de leur différence…

coup de pouce 2
pour étudier la position relative des deux courbes, il faut comparer $f(x)$ et $g(x)$, on peut donc étudier le signe de $f(x)-g(x)$ et ne pas oublier que $x>\ln x$ pour tout $x>0$.

coup de pouce 3
travailler à partir de ce que l'on sait c'est à dire $x\geqslant 2$ pour arriver à $\sqrt{3x^2+2}\geqslant 2$ en opérant sur l'inégalité.

coup de pouce 4

$\frac{t^3}{3}+t^2-8t=\frac{t^3}{3}+(t^2-8t)$
Partez de $t\geqslant 2$ et compléter $\frac{t^3}{3}\geq$…….

coup de pouce 5

on pourra utiliser cette propriété : pour tout réel k positif , si $a\geqslant b$ alors $a+k\geqslant b$

coup de pouce 6

Montrer que $n^2+10n+3>n^2$

coup de pouce 7

Utiliser que $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ pour tout réel x

coup de pouce 8

formaliser l'hérédité : il s'agit de montrer que si $0<u_k<3$ et si $u_{k+1}=\sqrt{u_k+5}$ alors $0<u_{k+1}<3$.

coup de pouce 9

formaliser l'hérédité : il s'agit de montrer que si $u_k\geqslant k^2$ et si $u_{k+1}=u_k+2k+3$ alors $u_{k+1}\geqslant(k+1)^2$

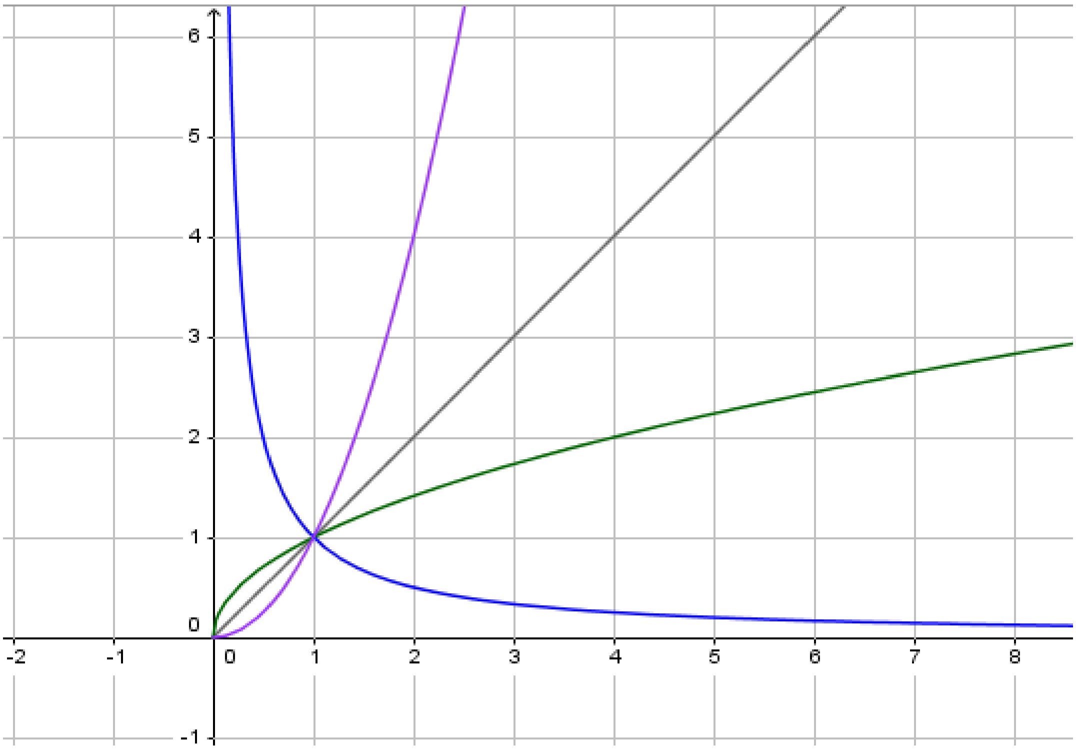
coup de pouce 10
on étudie la fonction $f(x)=e^x-(1+x)$

coup de pouce 11

on pose $a=\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ et $b=\frac{2^{n-1}}{9^{n+1}}$

Réponses :

Outil 0 :



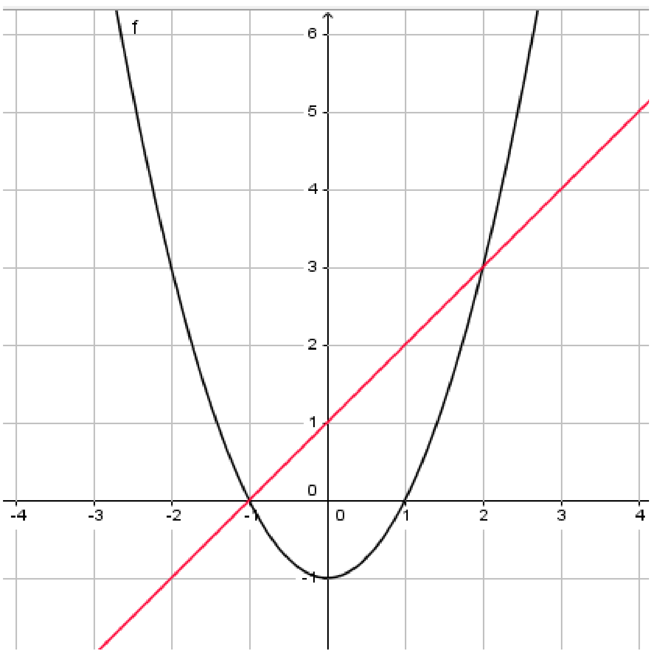
si $0<x<1$ alors $x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

si $x>1$ alors $\frac{1}{x}<\sqrt{x}<x<x^2$

si $x=1$ alors $x^2=x=\frac{1}{x}=\sqrt{x}$

Exercice 1 :

$f(x)\geqslant g(x)$ pour $x\in[-1;2]$.



Outil 1 :

1. Le trinôme $A=(x-1)(2x+3)$ a deux racines 1 et $\frac{-3}{2}$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad -1{,}5 \quad$ 1 $\quad +\infty$
A	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

2. $B=(x-1)(2x+3)-(x-1)^2=(x-1)(2x+3-x+1)=(x-1)(x+4)$, ce trinôme a deux racines 1 et -4 d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad -4 \quad$ 1 $\quad +\infty$
B	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

3.

x	0 $\quad 2 \quad$ e $\quad +\infty$
$x-2$	$\Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad \vdots \quad +$
$\ln x-1$	$\Vert \quad - \quad \vdots \quad - \quad 0 \quad +$
$(x-2)(\ln x-1)$	$\Vert \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

Outil 2 :

1. $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ donc $x\geqslant\sqrt{x}$ si et seulement si $\sqrt{x}\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 1$
si $0\leqslant x\leq 1$ alors $x\leqslant\sqrt{x}$
si x>1 alors alors $x>\sqrt{x}$

2. $x-x^2=x(1-x)$, on a un trinôme qui a deux racines 0 et 1 d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ 1 $\quad +\infty$
$x-x^2$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

Donc si $x\in]0;1[$, $x>x^2$, si $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $x<x^2$ et $x=x^2$ pour $x=0$ ou $x=1$.

3. $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$
d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 0	$\quad 1 \quad$ $+\infty$
x	$- \quad \vdots \quad -$	$\Vert \quad + \quad \vdots \quad +$
x^2-1	$+ \quad 0 \quad -$	$\Vert \quad - \quad 0 \quad +$
$x-\frac{1}{x}$	$- \quad 0 \quad +$	$\Vert \quad - \quad 0 \quad +$

Si $x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$, $x<\frac{1}{x}$, si $x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$, $x>\frac{1}{x}$ et si $x=1$ ou $x=-1$ alors $x=\frac{1}{x}$.

Exercice 2 :

1.

$(x+1)^2-(x^2+3)=x^2+2x+1-x^2-3=2x-2$

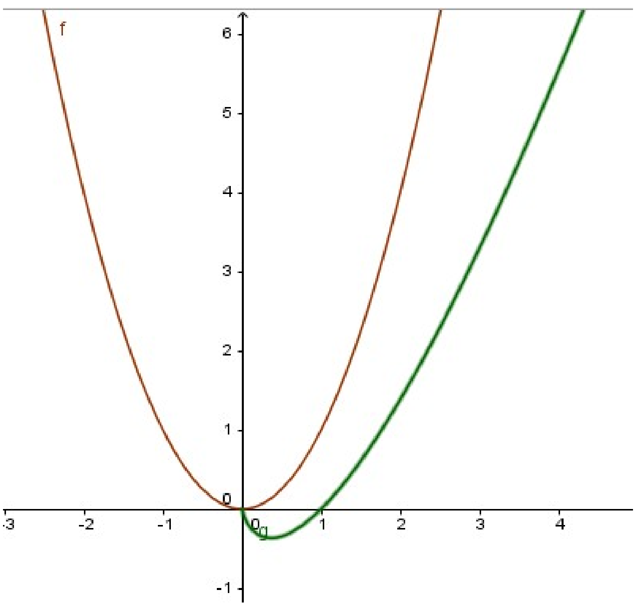
donc si $x\geqslant 1$, $2x-2\geqslant 0$ et donc $(x+1)^2\geqslant x^2+3$

2. x^2-4x+5 est un trinôme du second degré dont le discriminant est négatif, il n'a pas de racine et $x^2-4x+5>0$ pour tout réel x .

3. $x^2-8x+2-2x+30=x^2-10x+32$, le discriminant de ce trinôme est négatif donc $x^2-10x+32>0$ pour tout réel x soit $x^2-8x+2>2x-30$ pour tout réel x

Exercice 3 :

$x^2-x\ln x=x(x-\ln x)$ or $x>\ln x$ pour tout $x>0$, donc $x^2>x\ln x$ pour tout $x>0$, la courbe de f est donc au dessus de celle de g.



Outil 3 :

1. $x\geqslant 2\Leftrightarrow x^2\geqslant 4\Leftrightarrow 3x^2+2\geqslant 14\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+2}\geqslant\sqrt{14}\geqslant 2$ donc pour tout $x\geqslant 2$, $\sqrt{3x^2+2}\geqslant 2$.

2. la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ donc $1\leqslant x^2\leqslant 4$ soit $5\leqslant 3x^2+2\leqslant 14$.

3. $t\geqslant 2\Leftrightarrow t-8\geqslant -6$ or $t^2-8t=t(t-8)$ donc $t(t-8)\geqslant -12$

$t\geqslant 2\Leftrightarrow\frac{t^3}{3}\geqslant\frac{8}{3}$

donc $\frac{t^3}{3}+t^2-8t\geqslant -12+\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{t^3}{3}+t^2-8t\geqslant\frac{-28}{3}$

Exercice 4 :

a. $n\geqslant 6\Leftrightarrow n-6\geqslant 0$ or $n^3\geqslant n^3$ donc $n^3+n-6\geqslant n^3$.

on peut aussi étudier le signe de la différence : $n^3+n-6-n^3=n-6$ or $n-6\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 6$

donc $n^3+n-6\geqslant n^3$ pour tout $n\geqslant 6$.

b. $\lim_{n\to+\infty} n^3=+\infty$, d'après le théorème des comparaisons, $\lim_{n\to+\infty} n^3+n-6=+\infty$

Exercice 5 :

1. $10n+3>0$ donc $n^2+10n+3>n^2$ or $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2+10n+3=+\infty$
2. $(n+3)^8>0$ donc $n+(n+3)^8>n$ or $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n+(n+3)^8=+\infty$
3. $\sqrt{n^2+3n+8}>0$ donc $n+\sqrt{n^2+3n+8}>n$ or $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n+\sqrt{n^2+3n+8}=+\infty$

Exercice 6 :

1. $u_n=n^2+\sin(3n)$
$-1\leqslant\sin(3n)\leqslant 1$ donc $n^2+\sin(3n)\geqslant -1+n^2$
or $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2. $v_n=\sqrt{n^4+3n}$
$n^4+3n\geqslant n^4 \Leftrightarrow \sqrt{n^4+3n}\geqslant\sqrt{n^4} \Leftrightarrow \sqrt{n^4+3n}\geqslant n^2$
or $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

3. $u_n=\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^3}$

$-1\leqslant\sin n\leqslant 1$
si n est pair $(-1)^n=1$ donc $-1\leqslant(-1)^n\sin n\leqslant 1$
si n est impair $(-1)^n=-1$ donc $1\geqslant(-1)^n\sin n\geqslant -1$ soit $-1\leqslant(-1)^n\sin n\leqslant 1$
pour tout n , on a $-1\leqslant(-1)^n\sin n\leqslant 1$.
donc $\dfrac{-1}{n^3}\leq\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^3}\leq\dfrac{1}{n^3}$
or $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n^3}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

Exercice 7 :

P_n : « $0<u_n<3$ »

initialisation :
$u_0=0$ donc $0<u_0<3$, P_0 est donc vraie.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier k tel que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

P_k : « $0<u_k<3$ »
$u_{k+1}=\sqrt{u_k+5}$ or $0<u_k<3 \Leftrightarrow 5<u_k+5<8 \Leftrightarrow \sqrt{5}\leqslant\sqrt{u_k+5}\leqslant\sqrt{8}$ or $\sqrt{5}>0$ et $\sqrt{8}<3$ donc $0<u_{k+1}<3$
Si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion :
La proposition est vraie pour n=0, elle est héréditaire , elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

u est la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=\sqrt{u_n+5}$, démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel $n\geqslant 1$, $0<u_n<3$.

Exercice 8 :

P_n : « $u_n \geq n^2$ »

initialisation :
$u_0=1$ et $1^2=1$ donc , P_0 est donc vraie.

Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier k tel que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

P_k : « $u_k \geqslant k^2$ »
or $u_{k+1}=u_k+2k+3$ donc $u_{k+1}\geqslant k^2+2k+3$ or $(k+1)^2=k^2+2k+1$ donc $k^2+2k+3>(k+1)^2$
donc $u_{k+1}>(k+1)^2$
Si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion :
La proposition est vraie pour n=0, elle est héréditaire , elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Outil 4 :

f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=x^2-2x-3$, ce trinôme a deux racines -1 et 3.
$f'(x)>0$ sur $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$.
$f'(x)<0$ sur $]-1;3[$ donc f est strictement décroissante sur $[-1;3]$.
d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗	$+\infty$

$\frac{11}{3}$ est le maximum de la fonction f sur $]-\infty;3]$ or $\frac{11}{3}<4$ donc $f(x)<4$ pour tout $x\in]-\infty;3]$.

Exercice 9 :

on étudie la fonction $f(x)=\mathrm{e}^x-(1+x)$ sur $\mathbb{R}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$
$\mathrm{e}^x-1>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x>0$
d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc $f(x)\geqslant 0$ pour tout réel x soit $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ pour tout réel x.

Outil 5 :

$a=\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ et $b=\frac{2^{n-1}}{9^{n+1}}$ donc $\frac{a}{b}=\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}\times\frac{3^{2n+2}}{2^{n-1}}=36$, $\frac{a}{b}\geqslant 1$ donc $a\geqslant b$, on a donc pour tout entier naturel n, $\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}\geqslant\frac{2^{n-1}}{9^{n+1}}$.