Produit nul et factorisation

La semaine précédente on commence à travailler en questions flash des factorisations simples avec des QCM du type :

$x^2-3x=$	a) $-2x$	b) $x-3$	c) $x(x-3)$
$4x+8=$	a) $4(x+2)$	b) $12x$	c) $2x^2+8$

etc.
L'étape 1 permet de faire le point sur les calculs et de clarifier les connaissances sur les notions d'inverse, d'opposé mais aussi sur la division. L'étape 2 donne l'occasion de prouver et d'institutionnaliser les propriétés, elle permet aussi de travailler la logique. L'étape 3 est un réinvestissement de l'étape 2, son objectif est de montrer la nécessité de savoir factoriser pour résoudre une équation du second degré.
Au préalable de ce travail, il faut avoir travaillé la notion de proposition, d'implication, de réciproque et d'équivalence.

Étape 1 : Expérimentation ***d'après manuel seconde collection Barbazo*** (Hachette)
Compléter le tableau :

a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$	$\frac{a}{b}$
0	8				
-0,3	0,3				
-36	0				
$\frac{4}{3}$	-3				
0	0				
$\frac{-7}{5}$	$\frac{-7}{5}$				
-0,5	-2				
….	$\frac{-7}{4}$	0			
….	-2				0
-5	….			0	
232	…..		0		

C'est l'occasion de retravailler le vocabulaire :opposé, inverse.
Pour la « division par 0 », on peut utiliser une des deux explications suivantes :
1) Déterminer $\frac{a}{0}$ *c'est déterminer le nombre b tel que* $b\times 0=a$ *or* $b\times 0=0$ *pour tout réel b*
Si a=0, b peut prendre n'importe quelle valeur réelle or le résultat d'une opération ne peut pas avoir une infinité de solutions.
Si $a\neq 0$ *, alors* $b\times 0\neq a$ *donc l'équation n'a pas de solution.*

2) On a vu que diviser par b revient à multiplier par son inverse.
Donc diviser par 0 reviendrait à multiplier par l'inverse de 0 mais que vaudrait l'inverse de 0 ?
Supposons qu'un tel nombre existe et nommons-le c :
c est donc le nombre tel que $0\times c=1$ *. Or pour tout réel c,* $0\times c=0$ *. On en déduit que ce nombre c n'existe pas et donc 0 n'a pas d'inverse .*
Ce tableau n'est pas si simple que cela à compléter pour les élèves et on ne peut que constater que 0 leur pose réellement des difficultés à commencer par la première ligne quand il s'agit de déterminer la valeur de $\frac{a}{b}$ *. On retrouve le même problème à la 9ème ligne quand on doit résoudre* $\frac{a}{-2}=0$ *, certains écrivent que c'est impossible.*
Compléter l'avant dernière ligne pose aussi problème, beaucoup d'élèves proposent la valeur 5 pour b.

Pour amorcer le travail sur le produit nul, le professeur encourage les élèves à formuler des propositions du type:

- *pour tout réel c,* $0\times c=0$
- *Si* $a\times\ldots=0$ *alors a=0*
- *si b=0,* $\frac{a}{b}$ *est impossible*
- *si* $\frac{a}{b}=0$ *alors a=0.*
- *Si* $a+b=0$ *alors a et b sont opposés.*
- *Si* $a-b=0$ *alors a et b sont égaux.*
- *Etc.*

<u>Étape 2 : « Égalités égales à 0 »</u>

1. Soient *a* et *b* des réels. Que peut-on dire de *a* et *b* lorsque :

- $a+b=0$ **?**
- $a-b=0$ **?**
- $a\times b=0$ **?**
- $\frac{a}{b}=0$ **?**

Le professeur écrit les conjectures proposées par les élèves :
Si $a+b=0$ *alors* $a=-b$ *ou encore a et b sont opposés.*
Si $a-b=0$ *alors* $a=b$.
Si $a\times b=0$ *alors a=0 ou b=0.*
Si $\frac{a}{b}=0$ *alors a=0 et* $b\neq 0$.

Si seule la phrase « si $\frac{a}{b}=0$ alors a=0 » apparaît, le professeur peut l'encourager en disant par exemple « A quelle condition sur le nombre b, l'écriture $\frac{a}{b}$ a-t-elle un sens ? ».

Démontrons les deux dernières conjectures, les deux premières étant évidentes pour des élèves de seconde :

1ère conjecture :

Montrons que, pour tous réels a et b, si $a\times b=0$ alors a=0 ou b=0.

On distingue deux cas :

- *Si $a\neq 0$, alors on peut diviser l'égalité $a\times b=0$ par a et on obtient b=0.*
- *Si a=0, la propriété est démontrée.*

On a donc prouvé que lorsque $a\times b=0$, alors a=0 ou b=0 ou les deux…

C'est l'occasion d'aborder la notion de « ou » en mathématiques qui est non exclusif.

2ème conjecture :

Montrons que, pour tout a réel, pour tout b réel non nul, si $\frac{a}{b}=0$ alors a=0.

$\frac{a}{b}$ est calculable signifie que $b\neq 0$.

$a=\frac{a\times b}{b}=\frac{a}{b}\times b=0\times b=0$

Le professeur demande :

« Que pensez-vous de la réciproque de ces implications ? Sont-elles vraies ? »

Bilan : soit *a* et *b* deux réels

- **Si** $a+b=0$ **, alors** $a=-b$
  Si $a=-b$ **, alors** $a+b=0$
  On dit que «$a+b=0$» **équivaut à** «$a=-b$»
- **Si** $a-b=0$ **, alors** $a=b$
  Si $a=b$ **, alors** $a-b=0$
  On dit que «$a-b=0$» **équivaut à** «$a=b$»
- **Si** $a\times b=0$ **, alors** $a=0$ **ou** $b=0$
  Si $a=0$ **ou** $b=0$, **alors** $a\times b=0$
  On dit « $a\times b=0$ **» équivaut à** «$a=0$ **ou** $b=0$»
- **soit *a* un réel et *b* un réel non nul,**
  si $\frac{a}{b}=0$ **,alors** $a=0$
  Si $a=0$ **, alors** $\frac{a}{b}=0$
  «$\frac{a}{b}=0$» **équivaut à «** $a=0$ **»**

Ce travail peut aussi être l'occasion d'amorcer la négation d'une proposition en demandant par exemple aux élèves :

Que peut-on dire de a et de b lorsque $a\times b\neq 0$?

Si $a\times b\neq 0$ alors $a\neq 0$ et $b\neq 0$ …

2. Que peut-on dire de *x* lorsque :
   - $x-2=0$?
   - $x+2=0$?
   - $2x=0$?
   - $2x-6=0$?
   - $3x+5=0$?
   - $x(x-5)=0$?
   - $(x-3)(x+4)=0$?
   - $(x-5)^2=0$?
   - $\frac{x+5}{x}=0$?
   - $(x+1)-(x+3)=0$
   - $(x+1)(x-3)=4$

Les élèves travaillent sur la nature de l'expression valant zéro et appliquent les propriétés vues précédemment.

C'est l'occasion de rappeler que le carré d'une expression est un produit et de travailler de manière générale la reconnaissance des structures algébriques.

Les deux dernières équations mettent en avant les erreurs classiques des élèves.

<u>Étape 3 :</u>

Algorithme 1	**Algorithme 2**
A ← X+4 **A ← A²** **A ← A-7** **Afficher A**	**B ← X+3** **B ← 3*B** **Afficher B**

Pour quelles valeurs de X les deux algorithmes retournent-ils le même résultat?

Notre première idée était de partir d'un problème géométrique mais si on veut une équation où la factorisation est simple (du type $ax^2+bx=0$), on aboutit à la solution $x=0$ qui n'est pas parlante sur un problème géométrique (cf exercices 3 et 4 proposés ci-après).

Ce n'est pas la première fois qu'on rencontre ce genre d'exercices mêlant algèbre et algorithmique.

Les élèves traduisent le premier algorithme par l'expression : $(x+4)^2-7$ et le deuxième par $3(x+3)$.

Ils résolvent donc $(x+4)^2-7=3(x+3)$ qu'ils écrivent $x^2+8x+9=3x+9$.

Et là certains bloquent, d'autres écrivent $x^2+8x=3x$ et proposent 0 comme solution.

La question est de savoir s'il n'y a que cette solution.

D'autres divisent par x et écrivent $x+8=3$ qui équivaut à $x=-5$. On peut vérifier qu'on a effectivement trouvé une solution….

Il faut alors rappeler ce que signifie l'expression « résoudre $x^2+8x+9=3x+9$ », il s'agit de trouver toutes les valeurs de x telles que $x^2+8x+9=3x+9$. Or lorsqu'on divise par x, on « perd » une solution.

Quelques élèves proposent d'utiliser les propriétés précédentes et écrivent

$x^2+8x+9=3x+9$ *équivaut à* $x^2+5x=0$

Quelques élèves pensent à la factorisation, qui leur permet de retrouver les solutions précédentes.

Bilan:

Pour résoudre une équation qui contient des « x^2 » **:**

- **on se ramène à une écriture sous la forme A=0**
- **on factorise A**
- **on utilise la propriété «** $a\times b=0$ **» équivaut à** « $a=0$ **ou** $b=0$ » **et on conclut.**

D'où la nécessité de factoriser…. On poursuit ce travail en alternant des exercices techniques de factorisation et de résolutions d'équations et de problèmes .

Quelques exemples :

Exercice 1:

On considère 5 entiers consécutifs tels que la somme des carrés des trois premiers soit égale à la somme des carrés des deux derniers. Déterminer ces entiers.

Exercice 2 :

1. On considère l'équation E : $2x^2-50x+200=0$.

a. Montrer que $2x^2-50x+200=(2x-40)(x-5)$ pour tout réel x.

b. En déduire la résolution de l'équation E.

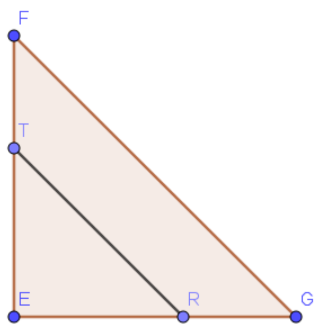
2. Un éleveur souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour ses animaux le long de sa bergerie . Il dispose de 50 m de clôture . Déterminer la valeur de x pour que l'aire de l'enclos soit de 200 m².

Exercice 3 :

On considère la figure ci-contre dans laquelle les triangles TER et GEF sont des triangles rectangles isocèles en E.

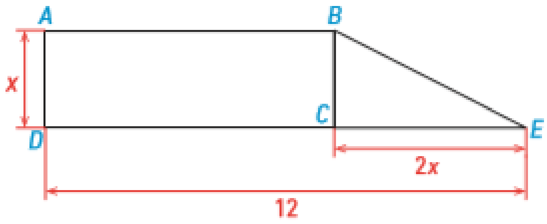
ER = ET = x cm (avec $x>0$) ; RG = TF = 5 cm.

Déterminer x afin que l'aire du triangle TER soit égale au quart de l'aire du triangle GEF.



Exercice 4 : (*manuel seconde Barbazo Hachette*)

Une piscine vue de dessus a la forme suivante. Les distances sont exprimées en mètre.
Déterminer les valeurs de la distance x pour que les aires du grand bain ABCD et du petit bain BCE soient égales.



Exercice 5: (*d'après manuel seconde Transmath)*

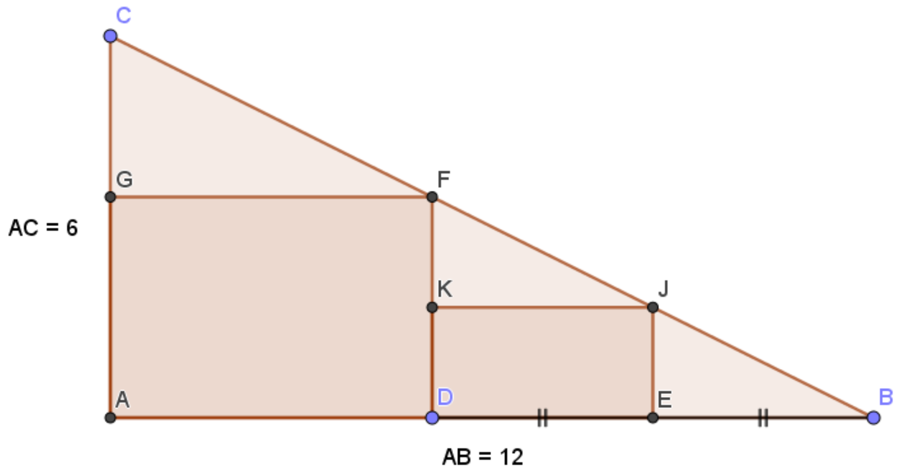
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=12 et AC=6.

D est un point mobile sur le segment [AB]. On construit le point F sur [BC] et le point G sur [AC] tels que ADFG est un rectangle.

On construit le point E milieu de [DB], le point K sur [DF] et le point J sur [BC] tels que DEJK est un rectangle.

On a alors DE = EB et on pose $DE=EB=x$.

Déterminer la valeur de x
pour que le rectangle ADFG et DEJK aient la même aire.



Exercice 6:

On choisit un nombre, on diminue de 3 le triple de ce nombre puis on calcule le carré du résultat.
On obtient 4, quel était ce nombre ?

On obtient $(3x-3)^2=4$ qui équivaut à $(3x-3)^2-4=0$ qui équivaut encore à $(3x-5)(3x-1)=0$, on a alors deux solutions : $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

Exercice 7:

Algorithme 1	**Algorithme 2**
A ← X **A ← X*2** **A ← A²-9** **Afficher A**	**B ← X** **C ← B*2-3** **B ← B+4** **B ← B*C** **Afficher B**

Pour quelles valeurs de X les deux algorithmes retournent-ils le même résultat?

On arrive à l'équation $(x+4)(2x-3)=(2x)^2-9$ *qui équivaut à* $(x+4)(2x-3)=(2x-3)(2x+3)$
.