IREM d'Aquitaine
17 mai 2017

La fourmi et le rapporteur

Frédéric Testard

Université de La Rochelle

Mesurer mieux pour mieux comprendre

La *sphère armillaire* de Ptolémée :
la Terre au centre de l'Univers...

L'amélioration des moyens d'observation est une source majeure de progrès scientifique. Ces progrès, pourtant, ne sont pas toujours faciles à vivre.

Tout le monde pense au procés de Galilée et à sa fameuse phrase « *Et pourtant, elle tourne* » (qu'il n'a sans doute jamais prononcée...) : c'est dans la douleur que l'homme a renoncé à occuper le centre de l'univers.

On ne doit pas oublier que jusqu'à Copernic (1473 - 1543), la théorie géocentrique de Claude Ptolémée ($\sim$ 90 - 170) constituait le fondement de l'astronomie.

Mirages gravitationnels

Les physiciens ont découvert depuis la fin du siècle dernier nombre de paradoxes. Ce sont les questions associées à l'un de ces paradoxes qui ont motivé le travail présenté ici.

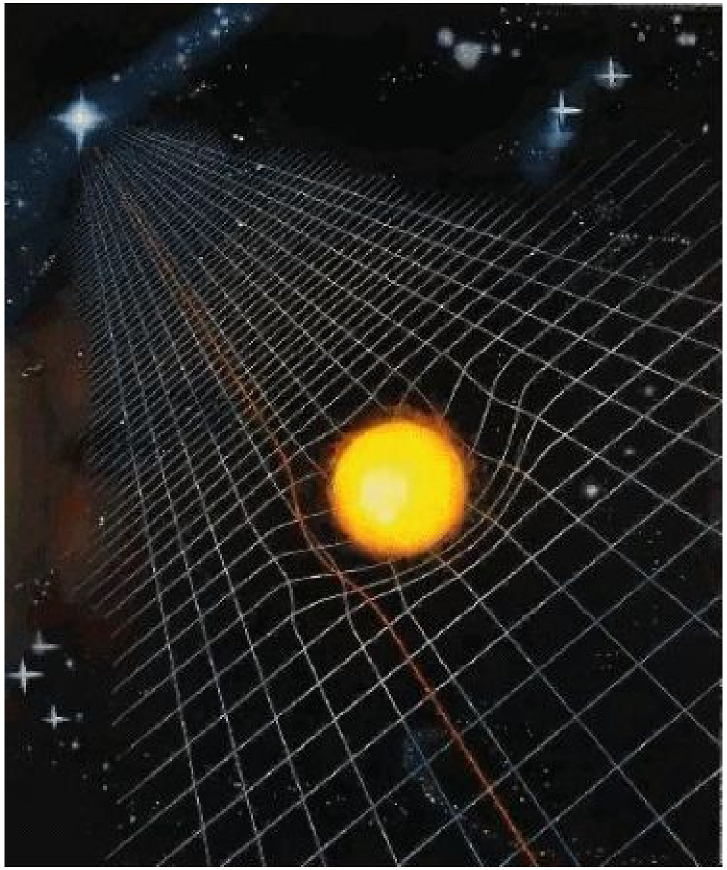
On constate, lors des éclipses totales de soleil, un phénomène appelé *mirage gravitationnel* ou *lentille gravitationnelle*.

Ce phénomène permet d'observer une étoile située derrière le soleil, comme si les rayons lumineux venant de cette étoile s'incurvaient autour du soleil.

Les lois de l'optique indiquent que les rayons lumineux se déplacent en suivant le chemin le plus rapide. On pensait jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que, dans l'espace interstellaire, ce chemin le plus rapide était la ligne droite.

L'existence des mirages gravitationnels nous force à abandonner ce point de vue. La branche de la physique qui étudie ces questions s'appelle la *théorie de la relativité générale*.

Les géodésiques
Des lignes droites dans un univers courbe



Une analogie pour décrire
les mirages gravitationnels...

La figure suggère la façon dont la « forme » de l'espace est modifiée par la présence d'un corps massif : le filet représente les « géodésiques » de l'espace, c'est-à-dire les lignes de plus court chemin. Le « soleil » déforme le filet et incurve les géodésiques. C'est l'un des principes de la relativité générale : la matière modifie la géométrie de l'espace.

Le trait rouge représente un rayon lumineux : il se propage le long d'une géodésique. Là où cette ligne est déformée, le rayon s'incurve et permet de voir une étoile normalement cachée par le soleil.

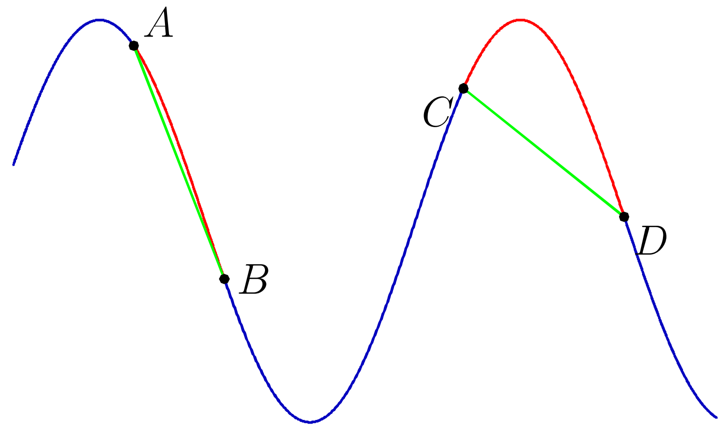
La courbure rallonge les géodésiques

Mathématiquement, les lignes les plus courtes cessent d'être des droites quand elles doivent suivre une surface ou une ligne courbée.

Intuitivement, une partie de l'espace (ou du plan) est courbée quand le plus court chemin entre deux points de cette partie *en restant dans la partie*, est plus long que la ligne droite.

Ci-contre, la courbure entre A et B est faible : il en résulte que l'arc (AB) est à peine plus long que le segment $[AB]$.

En revanche, le long de l'arc reliant C à D, elle est beaucoup plus forte. Cela se traduit par une nette différence entre la longueur de l'arc (CD) et celle du segment $[CD]$.



La dimension manquante...

Comme celle des courbes planes, la courbure des surfaces de l'espace se visualise aisément. Mais visualiser la courbure de l'espace dans lequel nous vivons n'est plus possible : il nous faudrait « disposer » d'une quatrième dimension.

Seules des observations « indirectes », telles que celles fournies par les lentilles gravitationnelles, peuvent attester cette courbure.

L'objectif de cette conférence est de présenter, dans un cadre simplifié que nous pourrons visualiser, un autre exemple de recherche indirecte d'éléments géométriques inaccessibles : c'est la métaphore de *la fourmi et du rapporteur*.

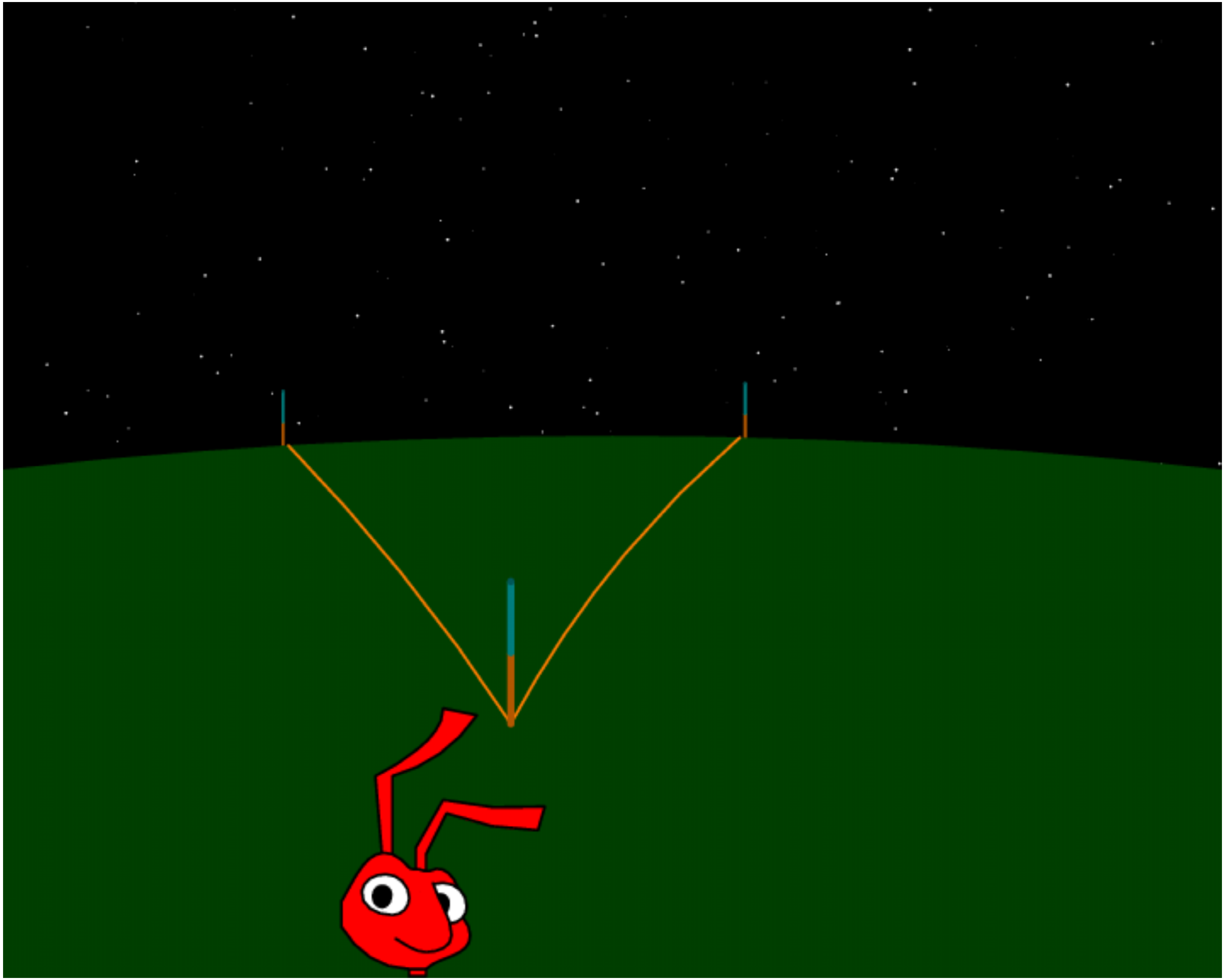
La dimension manquante...

Nous vivons sur une planète dont l'observation spatiale garantit la rotondité. Mais on n'a pas attendu les fusées pour s'en convaincre par l'observation.

• Un point situé sur terre à quelques dizaines de kilomètres nous est caché alors que nous voyons la lune située beaucoup plus loin.
• Quand un bateau paraît à l'horizon, c'est d'abord le sommet du mât qui apparaît puis le bateau semble monter au moins autant qu'il ne grandit.
• Lors des éclipses de lune, l'ombre dessinée par la terre a la forme d'un arc de cercle.

Si le troisième élément pourrait éventuellement traduire le fait que la terre a la forme d'un disque, les deux premiers impliquent que sa surface est courbée.

Quant aux fourmis, l'horizon pour elles est si près que c'est facile à voir...



Ératosthène : des petits pas pour les hommes, un grand pas pour l'humanité

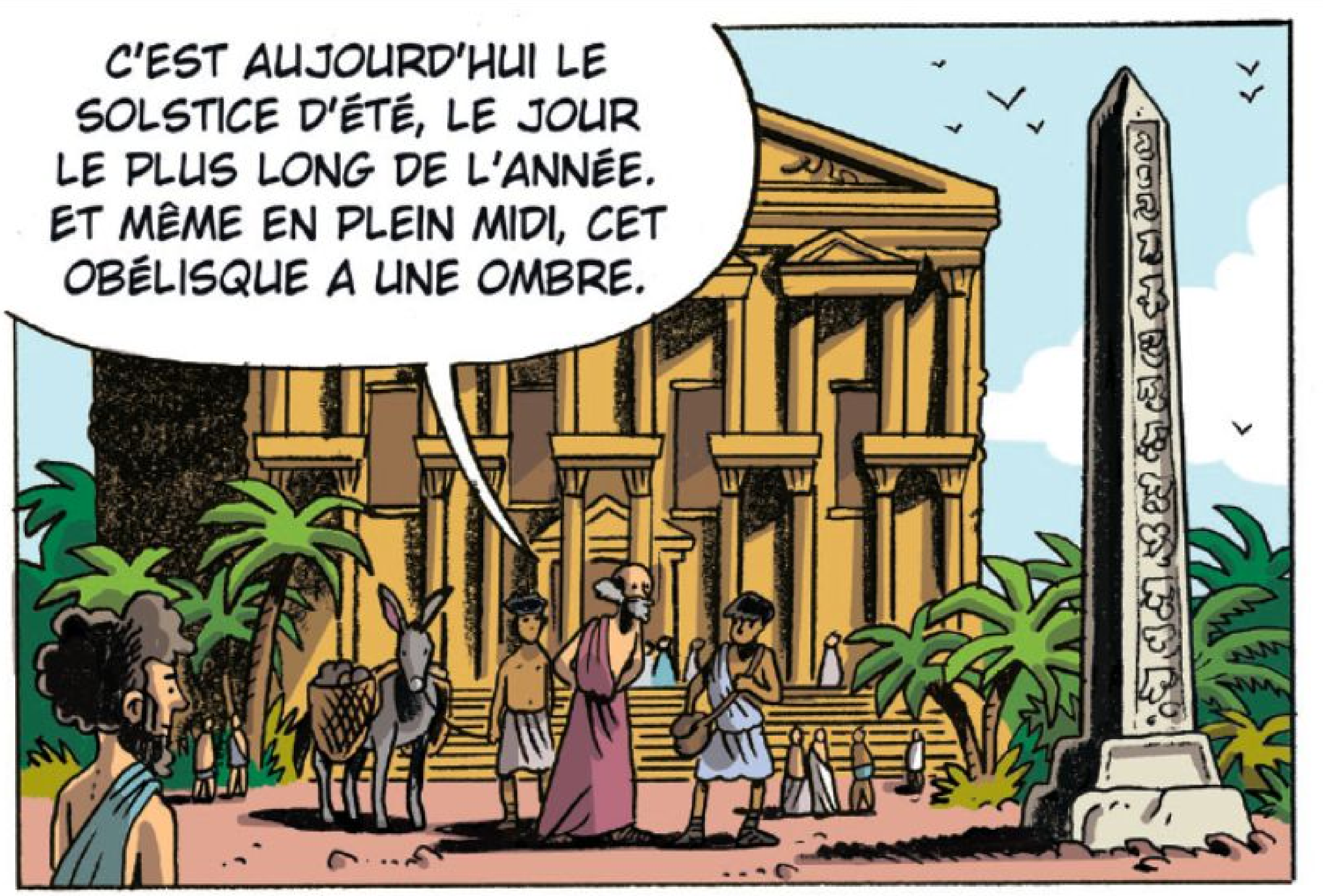
C'est convaincu de cette rotondité que, dans l'Antiquité, le savant Ératosthène a utilisé une observation en apparence banale pour calculer avec une remarquable précision la circonférence de la Terre.

Examinons avec lui le problème d'angles et d'ombres qui lui a permis, avec l'aide de beaucoup de petites « fourmis » humaines, de mesurer le méridien terrestre, c'est-à-dire la circonférence de la planète.

Source de la bande dessinée :
« *Odyssée, classe de sixième, Hatier, 2014* ».

Ératosthène
($\sim$ 276 av. J.-C. -$\sim$ 196 av. J.-C.)

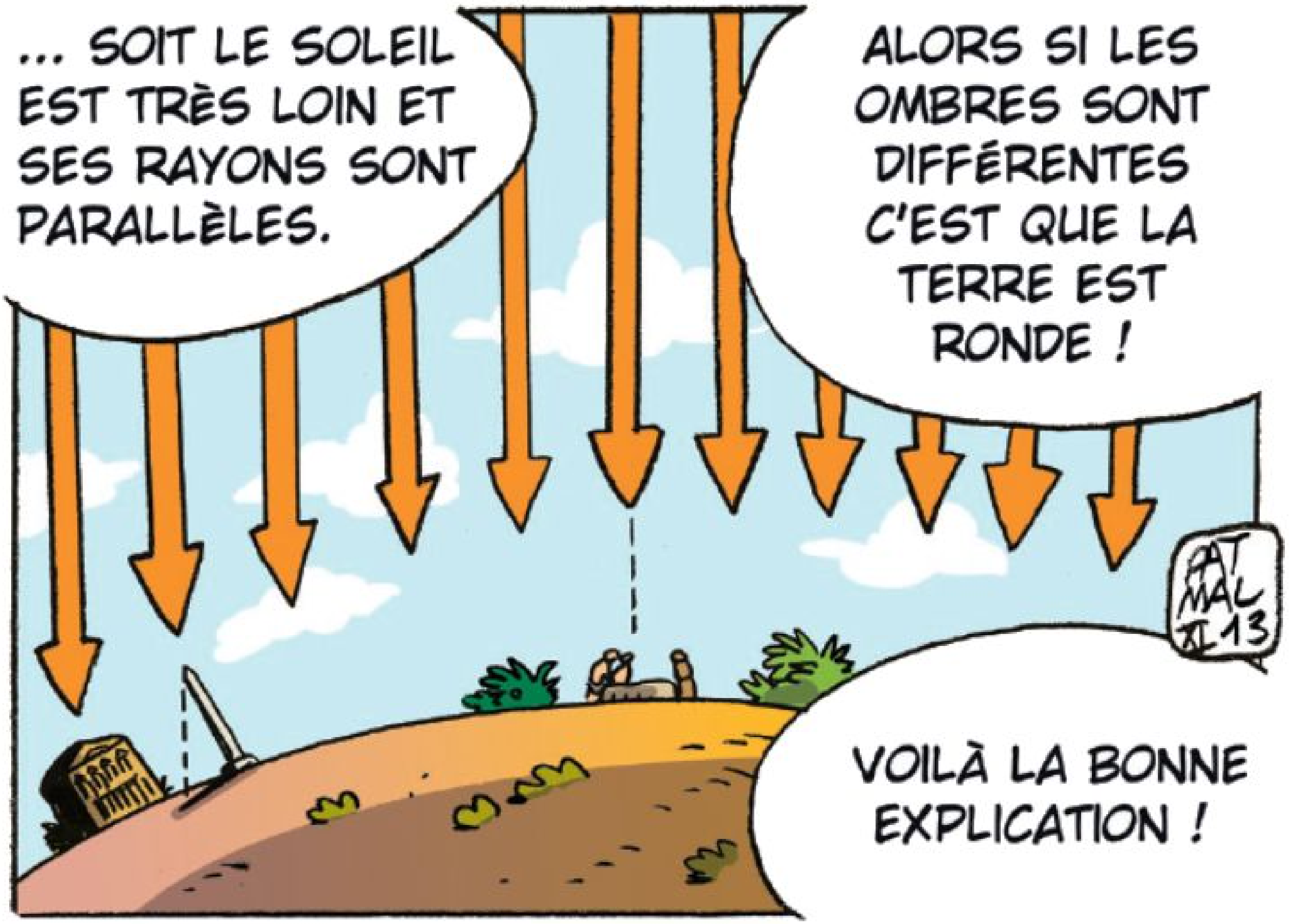
Une ombre à Alexandrie...



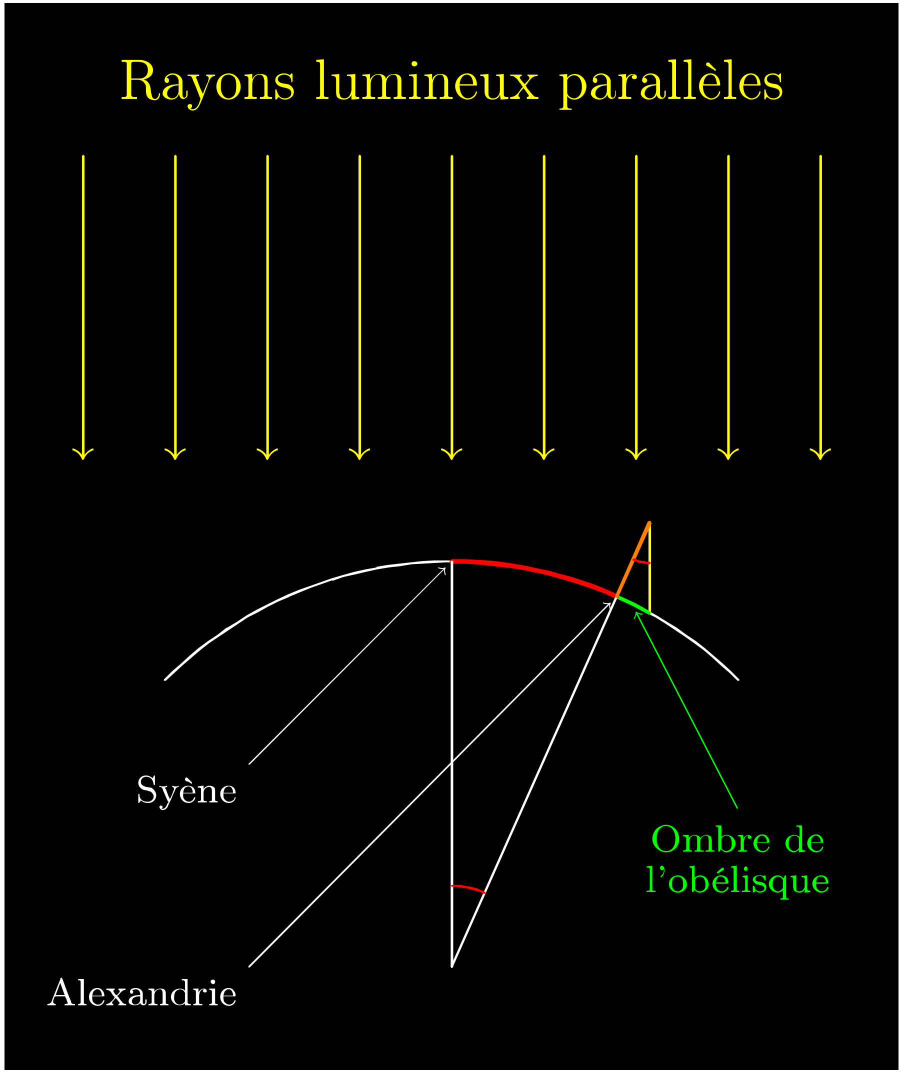
... mais pas à Syène

Une terre plate ?

Une terre ronde ?



Ératosthène : le calcul



La distance d entre Syène et Alexandrie (arc rouge) est proportionnelle à l'angle rouge au centre, lui-même égal à l'angle au sommet de l'obélisque.

Cet angle se calcule en utilisant la trigonométrie, après avoir mesuré l'obélisque et son ombre. Il est égal à $7{,}2^\circ$: le cinquantième d'un tour complet.

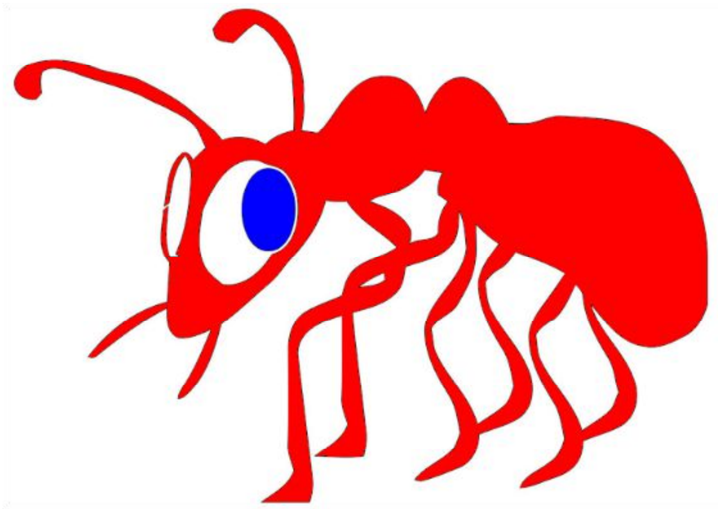
La circonférence est donc égale à 50 fois la distance d, soit environ $40\ 000$ kilomètres.

Mais...

Cependant, ces observations ne sont possibles qu'à des êtres ayant « accès à la troisième dimension » : on a besoin de l'obélisque ou du puits.

C'est ici qu'entre en scène notre fourmi.

Peut-on imaginer qu'en restant « collée » à la terre, c'est-à-dire en vivant sur une surface à deux dimensions, elle puisse par des observations indirectes calculer sa courbure ? C'est ce que nous allons examiner.



À la recherche des géodésiques

En pratique, tracer la géodésique reliant deux points d'une sphère est plutôt facile pour notre fourmi : il lui suffit de tendre un fil entre ces points (du moins s'ils ne sont pas trop éloignés, hypothèse raisonnable pour ce tout petit animal...).

Et cette méthode marche sur bien d'autres surfaces.

Sachant que dans le plan et l'espace « ordinaires » (pas ceux, courbés, de la théorie de la relativité), les géodésiques sont des lignes droites, nous commencerons cependant par constater sur quelques exemples que l'on peut parfois « redresser » une surface pour tracer ses géodésiques.

C'est quand viendra le tour de la sphère que la situation se compliquera : aucune transformation ne permet de la redresser (un problème bien connu des cartographes...).

Ce sera le moment pour notre fourmi de faire preuve d'ingéniosité et d'abstraction...

Réfléchissons...

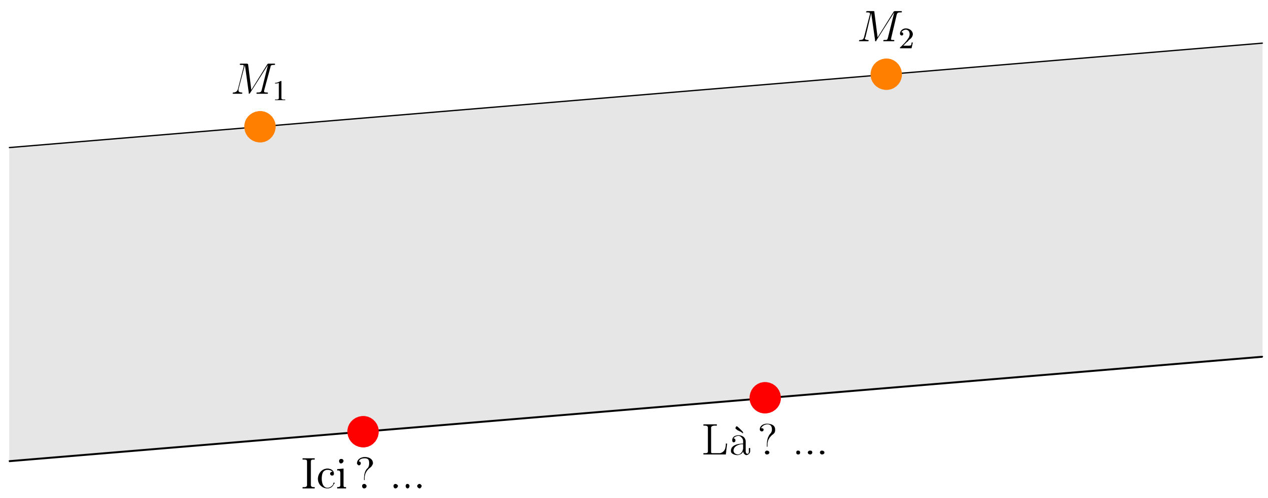
Nous avons déjà noté que, dans le plan ou l'espace, le plus court chemin entre deux points est le segment qui les relie. On dit que *les géodésiques du plan (ou de l'espace) sont les segments*.

Parfois cependant, des contraintes (passage obligé par une zone précise ou au contraire zone interdite) peuvent empêcher de se rendre d'un point à un autre en ligne droite.

Un problème de chemin avec contrainte...

Le plus simple problème de plus court chemin avec contrainte est celui de la réflexion des rayons lumineux. Dès la classe de cinquième, on peut résoudre ce problème, que nous énonçons ici sous une forme moins rayonnante...

Où placer la fourmilière ?

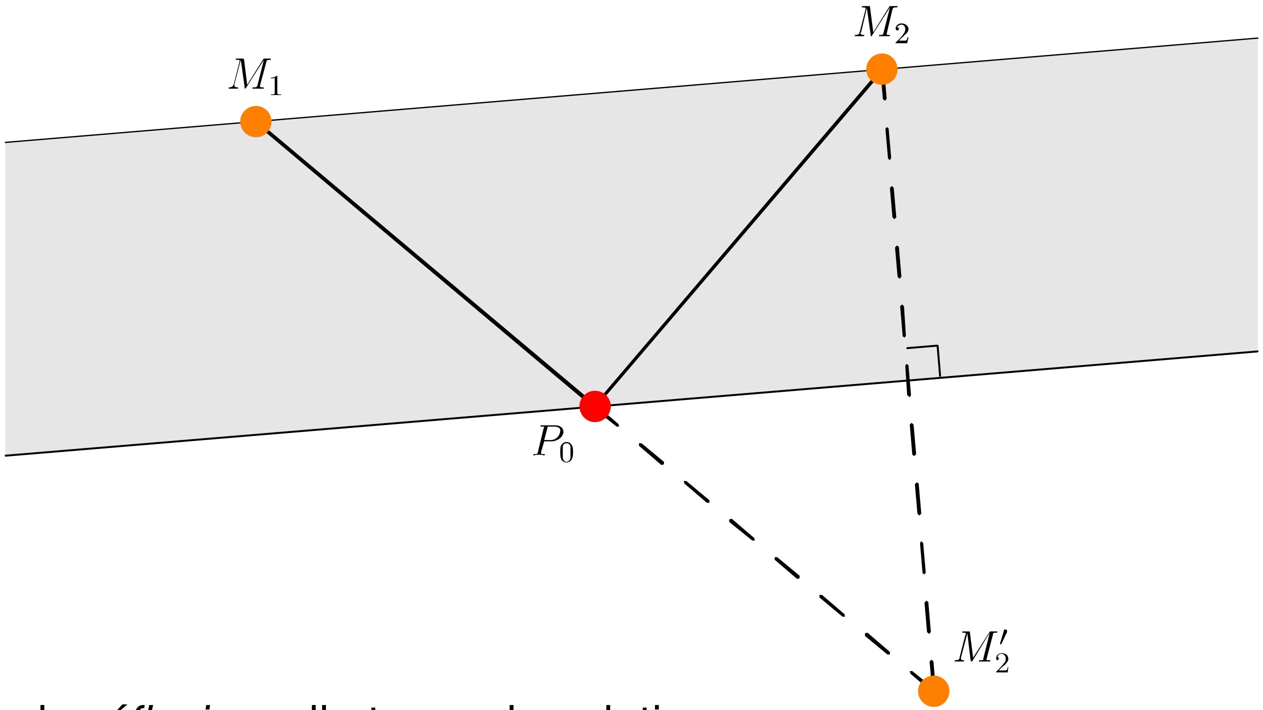


La fourmi s'approvisionne alternativement dans deux magasins M_1 et M_2 situés du même côté d'une rue.

Pas moyen de construire la fourmilière de ce côté : il y a des immeubles partout.

Mais de l'autre côté, il n'y a qu'un terrain vague. Elle se demande où s'installer pour avoir à marcher le moins possible.

Où placer la fourmilière ?

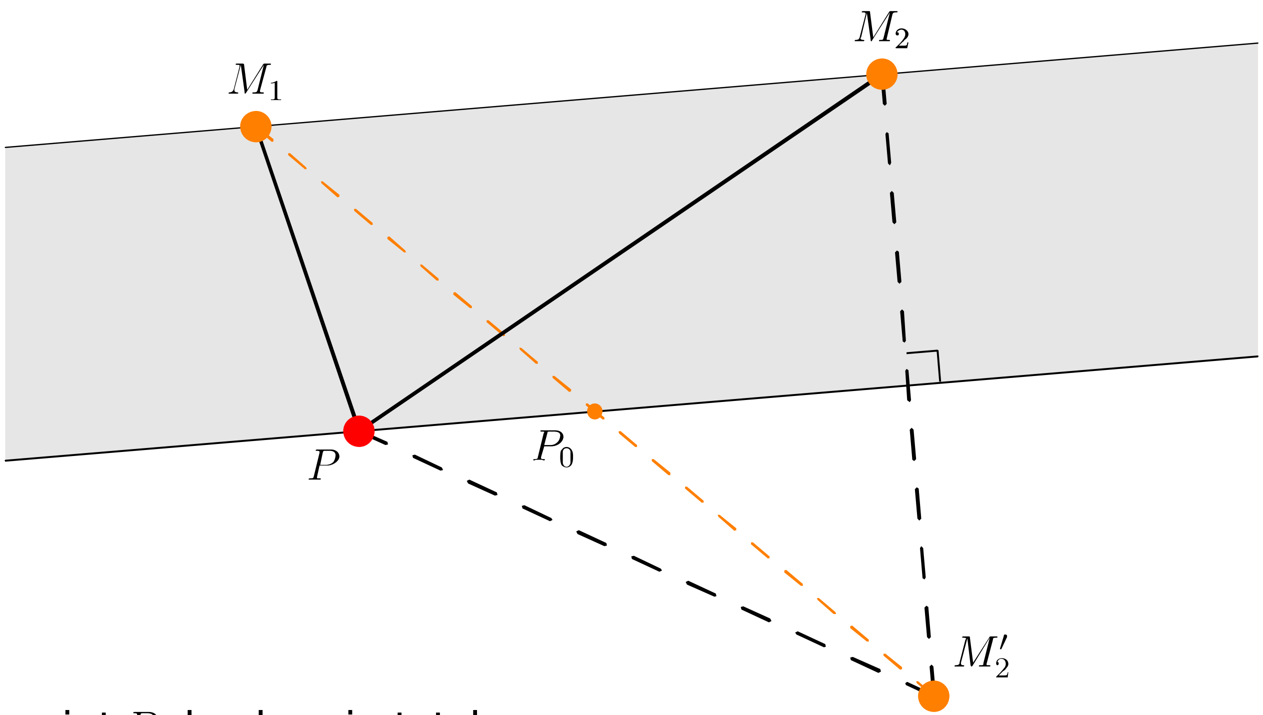


Après un peu de *réflexion*, elle trouve la solution.
Le point P_0 marque la position optimale : la distance à parcourir est égale à

$$M_1P_0 + P_0M_2 = M_1P_0 + P_0M_2'$$

qui est minimale car M_1, P_0 et M_2' sont alignés.

Où placer la fourmilière ?



En tout autre point P, le chemin total

$$M_1P + PM_2 = M_1P + PM_2'$$

est plus long car M_1, P et M_2' ne sont plus alignés : grâce à sa connaissance des géodésiques du plan, la fourmi a résolu ce problème de plus court chemin avec contrainte.

La fourmi sur la caisse

Enhardie par ce premier succés, elle s'attaque à un autre problème.

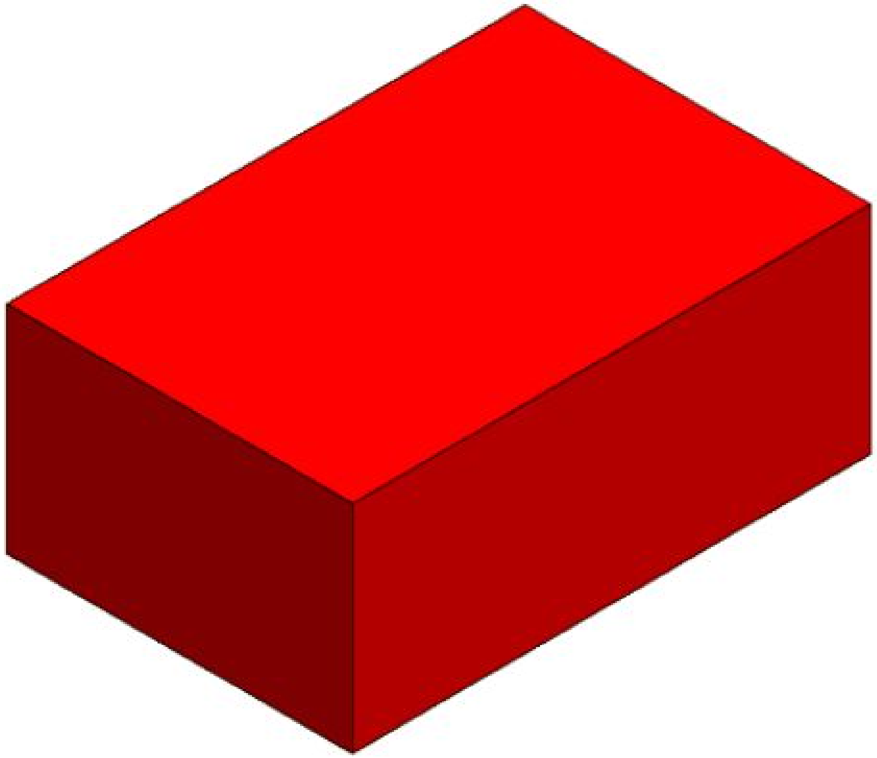
Imaginons qu'elle se déplace sur une caisse : impossible de relier par une ligne droite des points situés sur des faces différentes.

S'inspirant de l'exemple précédent, elle décide de transformer la caisse pour trouver le plus court chemin entre ces points.

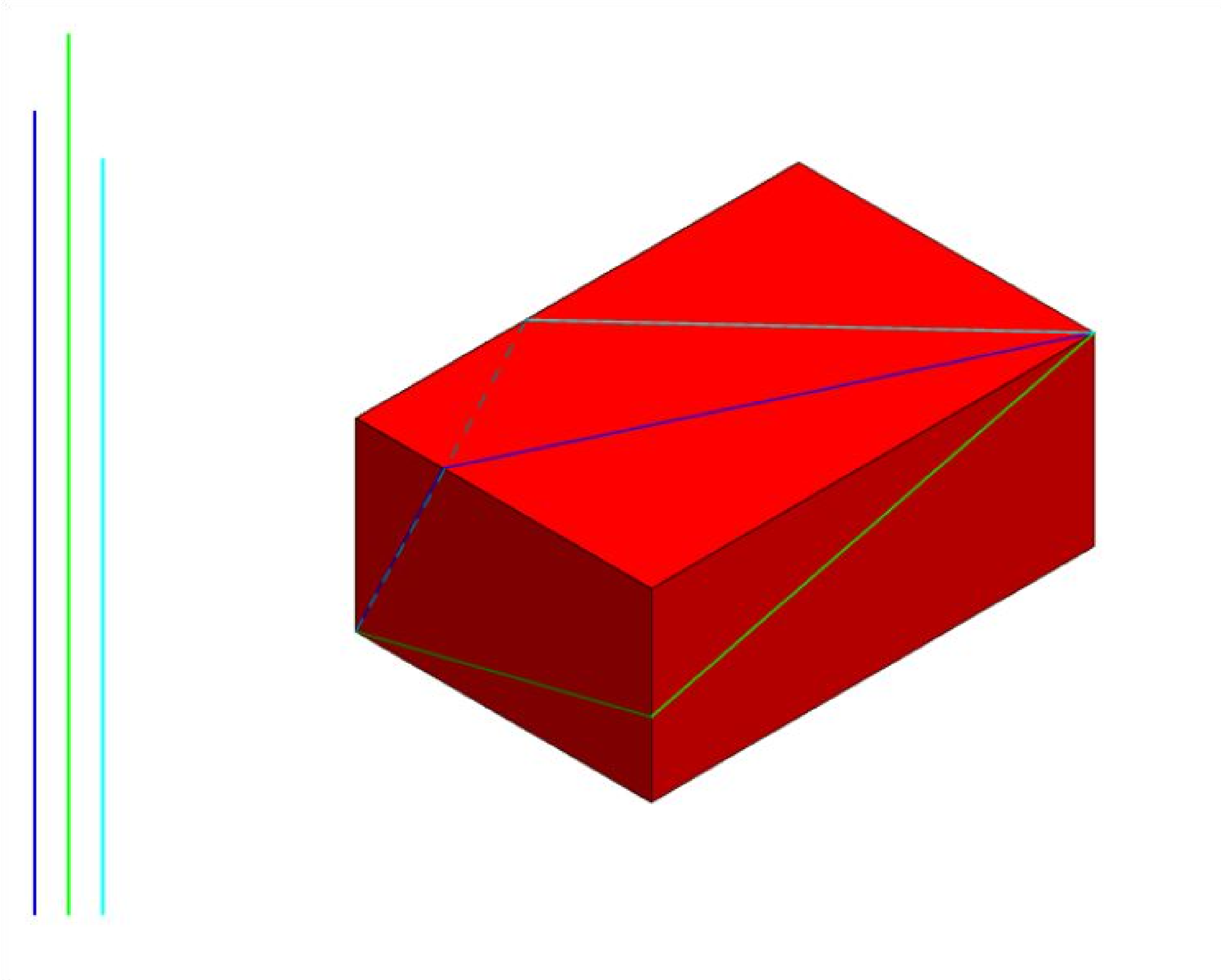
En ouvrant la caisse le long d'une arête, on transforme deux faces adjacentes en une seule face plane. Le plus court chemin sur cette face est la ligne droite. Il suffit alors de refermer la caisse pour obtenir la géodésique.

Nous allons voir pourtant que ce n'est pas forcément si simple...

La fourmi sur la caisse



La fourmi sur la caisse



D'autres solutions ?

Au vu de ces tracés, on pourrait devenir méfiant et se demander s'il n'existe pas une autre manière donnant un chemin encore plus court. On pourrait par exemple ouvrir la caisse le long d'autres arêtes, mais les nouveaux tracés sont symétriques de ceux qu'on a déjà et ont donc la même longueur.

En fait le plus court tracé est bien le chemin bleu obtenu à la troisième tentative.

En effet, un chemin de A à G dessiné sur la caisse doit forcément à un moment quitter l'une des faces contenant le point A pour entrer dans une de celles qui contiennent G.

Appelons M_0 le point où ceci se produit. Le chemin est minimal s'il se réduit au segment $[AM_0]$ suivi du segment $[M_0G]$, et si en plus M_0, A et G sont alignés quand on déplie la caisse le long de l'arête qui contient M : on obtient un des tracés ci-dessus (ou de leurs symétriques).

D’autres géodésiques

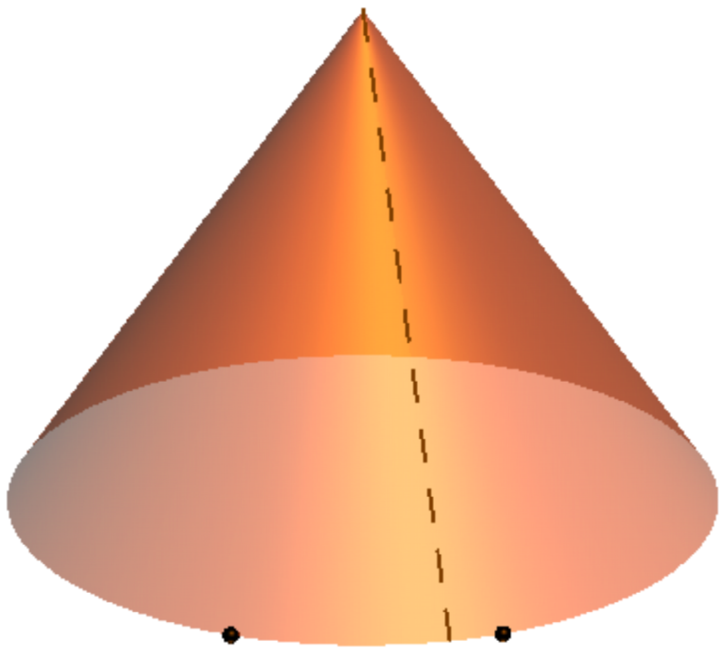
D’autres surfaces peuvent être aplaties comme on l’a fait pour la caisse : par exemple le cone ou le cylindre.

Sur ces surfaces, la recherche des géodésiques n’est pas plus difficile que sur la caisse, mais nécessite quand même des précautions dues au fait que toutes les manières d’aplatir la surface ne modifient pas les longueurs de la même manière.

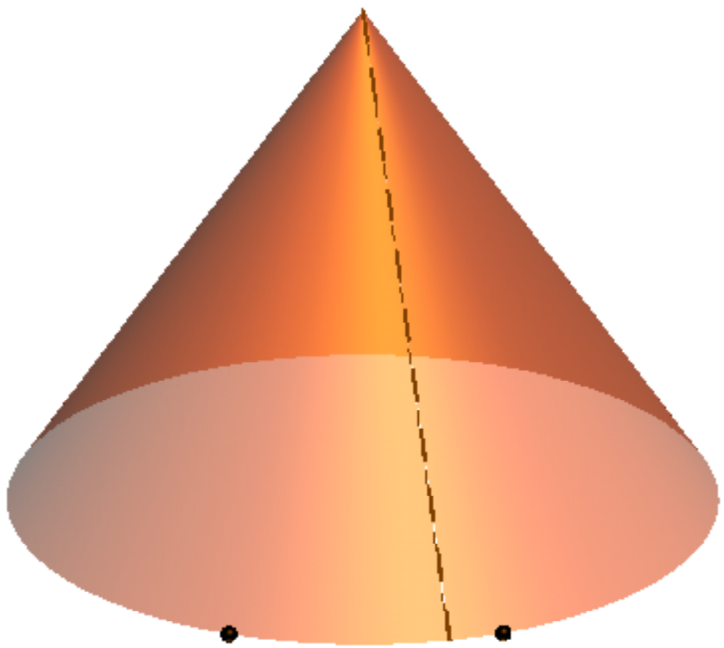
Nous allons décrire ceci en déroulant un cone de deux manières.

On ne peut pas aplatir tous les cones...

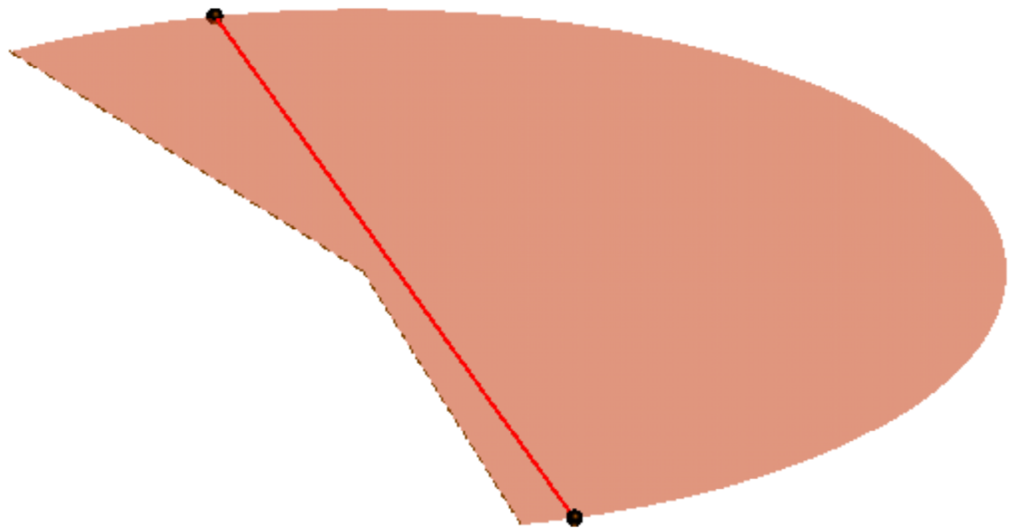
La fourmi sur le cone



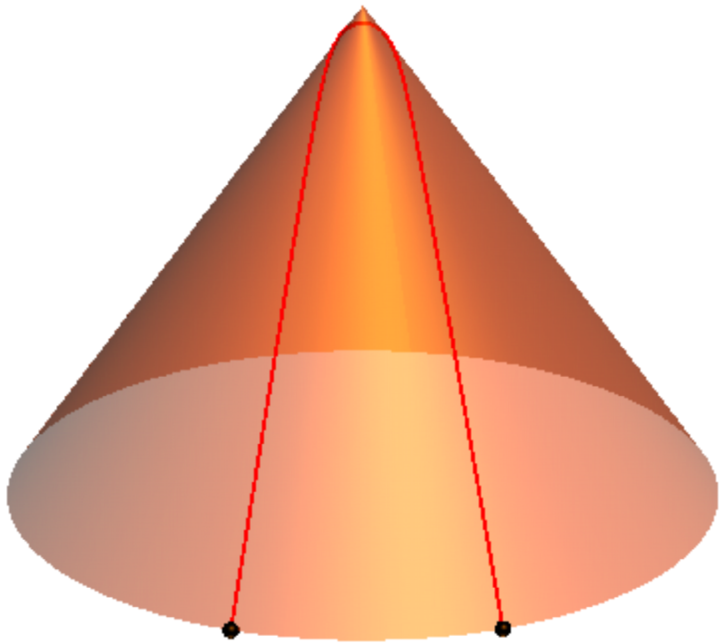
La fourmi sur le cone



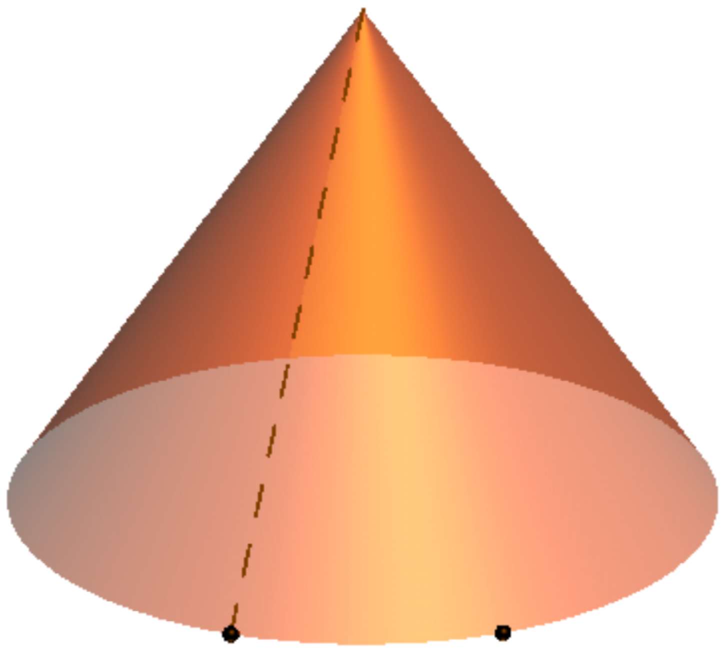
La fourmi sur le cone



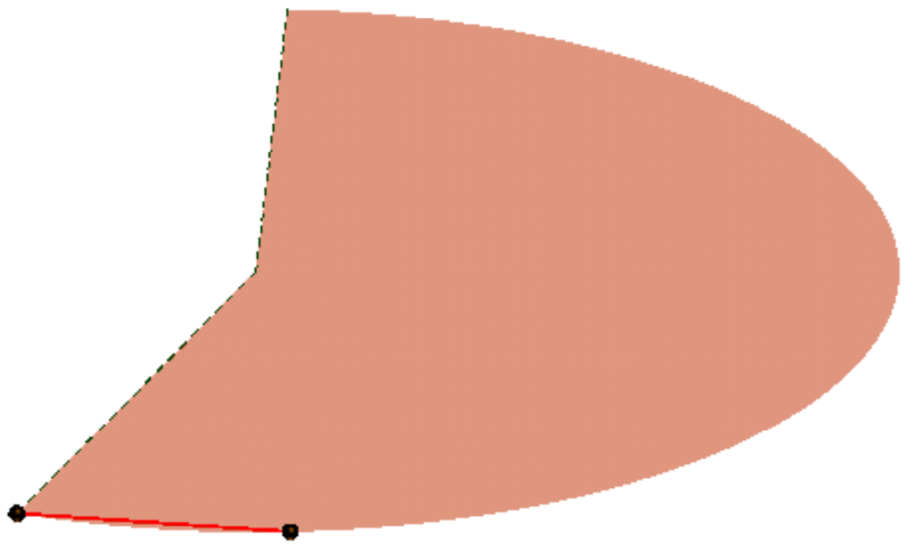
La fourmi sur le cone



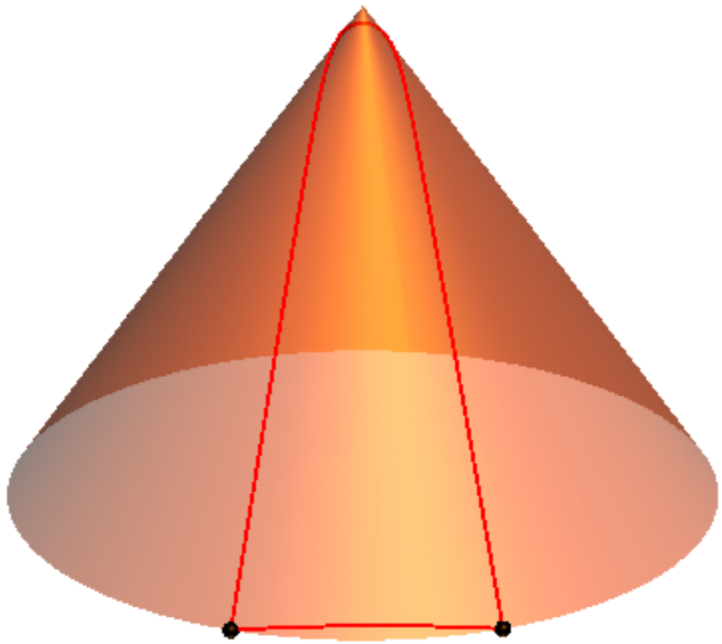
La fourmi sur le cone



La fourmi sur le cone



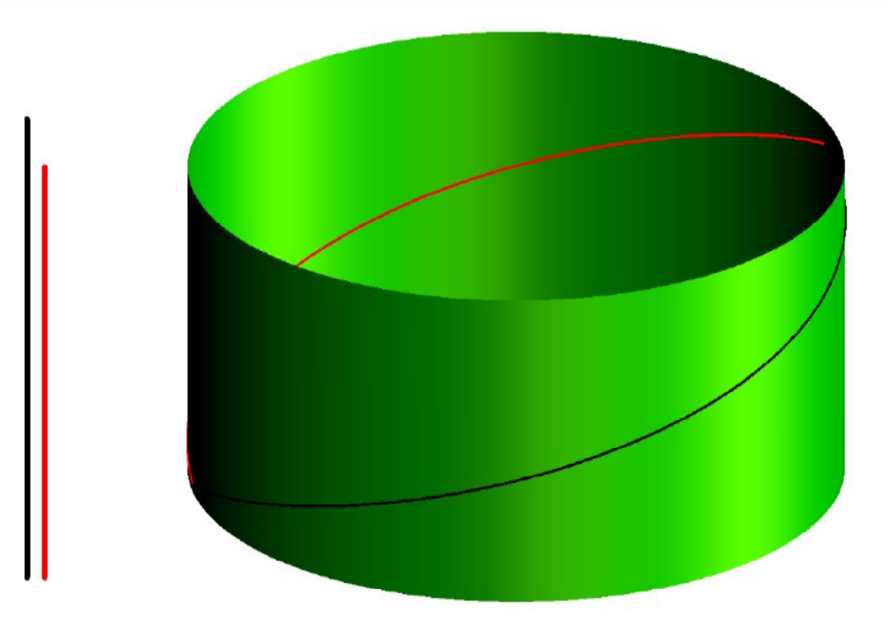
La fourmi sur le cone



Les géodésiques du cylindre

Comme le cone, le cylindre peut être déroulé à plat. Là encore, il faut faire attention lors du découpage.

La courbe obtenue est un arc d'*hélice circulaire* (trajectoire d'un point dont la vitesse ascensionnelle et la vitesse de rotation sont constantes). Il y a deux sortes de géodésiques dans le cylindre : les arcs d'hélices circulaires et les segments parallèles à son axe.



Et la sphère ?

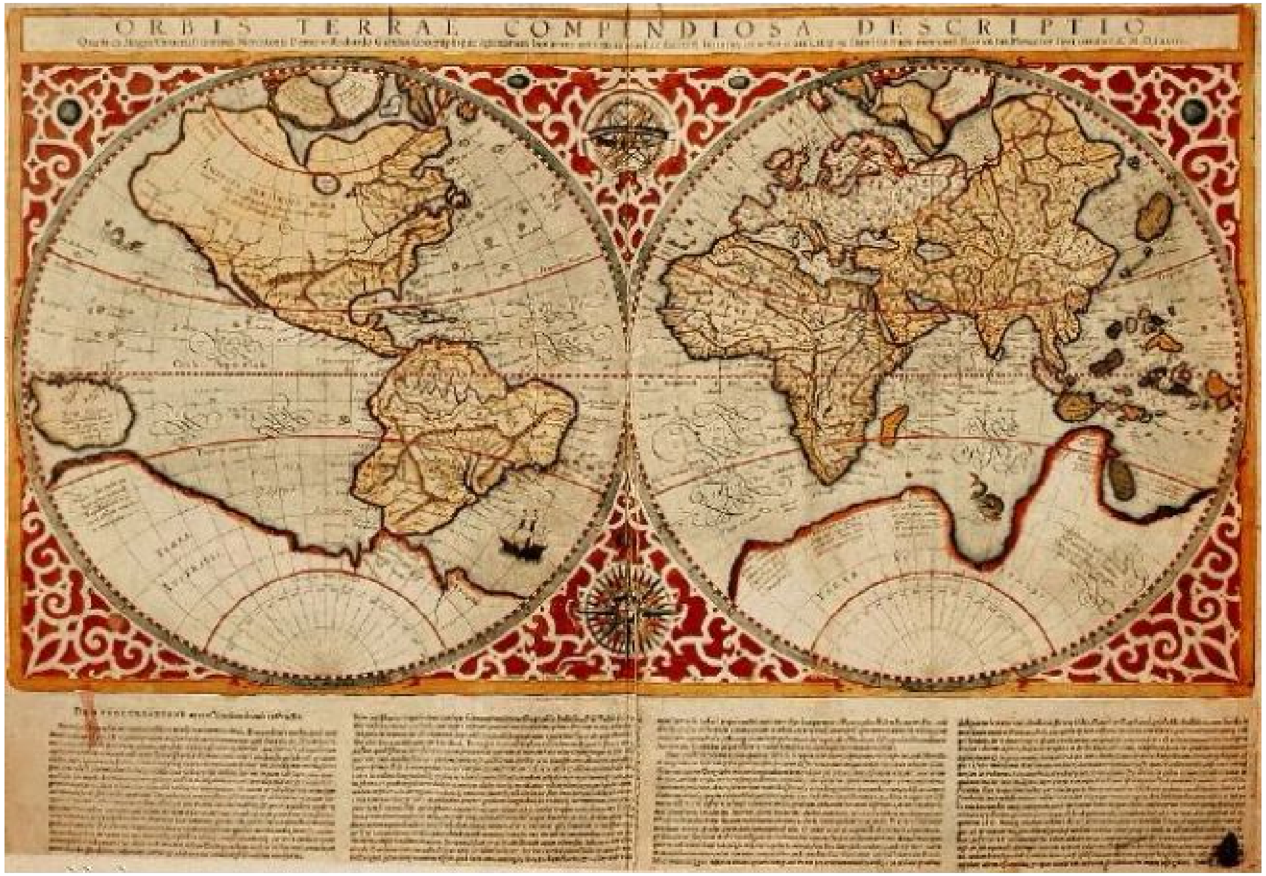
On peut se demander si une procédure analogue à celles décrites ci-dessus existe pour la sphère. Si c'était le cas, la recherche du chemin le plus court sur la terre entre deux points ne serait pas beaucoup plus compliquée que celles faites sur un cylindre ou un cone.

Mais on ne peut pas aplatir une sphère : il est impossible de représenter à plat même une minime partie de sa surface sans introduire une distorsion des longueurs.

Si celle-ci reste relativement minime pour des zones de petite taille (à l'échelle d'un pays comme la France par exemple), il n'en va pas de même pour des représentations globales.

L'inévitable distorsion...

C'est particulièrement évident sur cette carte de la Terre réalisée en 1569 en utilisant la *projection de Mercator*.

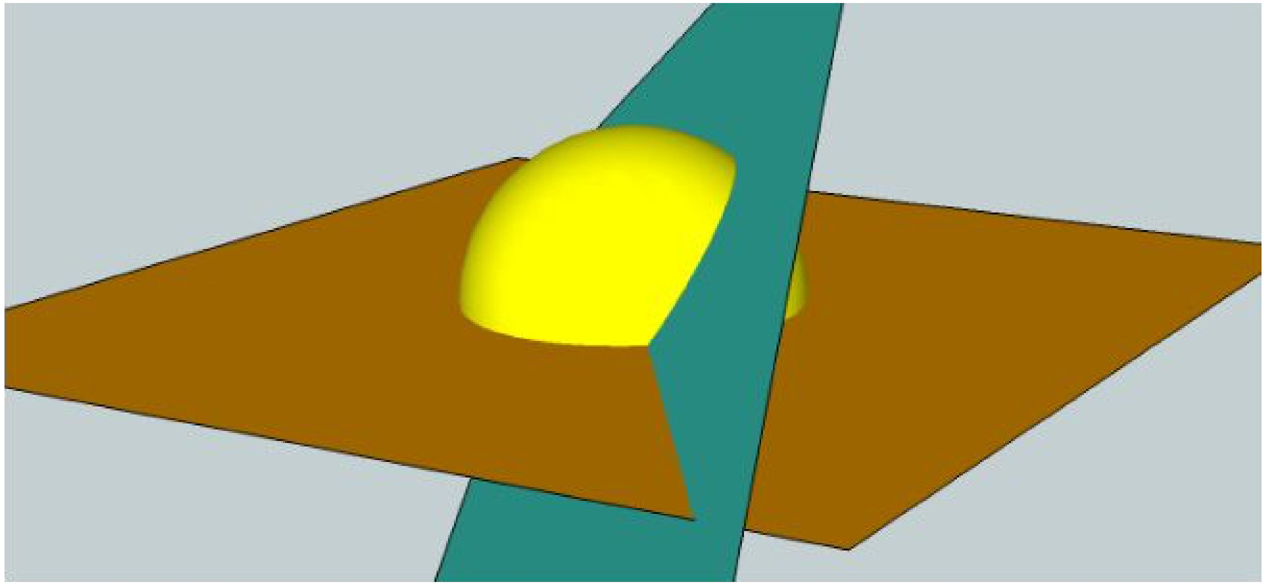


Source : encyclopédie Atlas multimedia 1999

Un peu de vocabulaire et de géométrie sphérique...

Il faudra donc une autre méthode pour déterminer les géodésiques de la sphère. C'est ici qu'entrent en scène les méridiens.

On appelle *grand cercle* de la sphère tout cercle obtenu comme intersection de la sphère par un plan contenant le centre de la sphère. On a représenté ci-dessous deux découpes de la sphère par de tels plans.

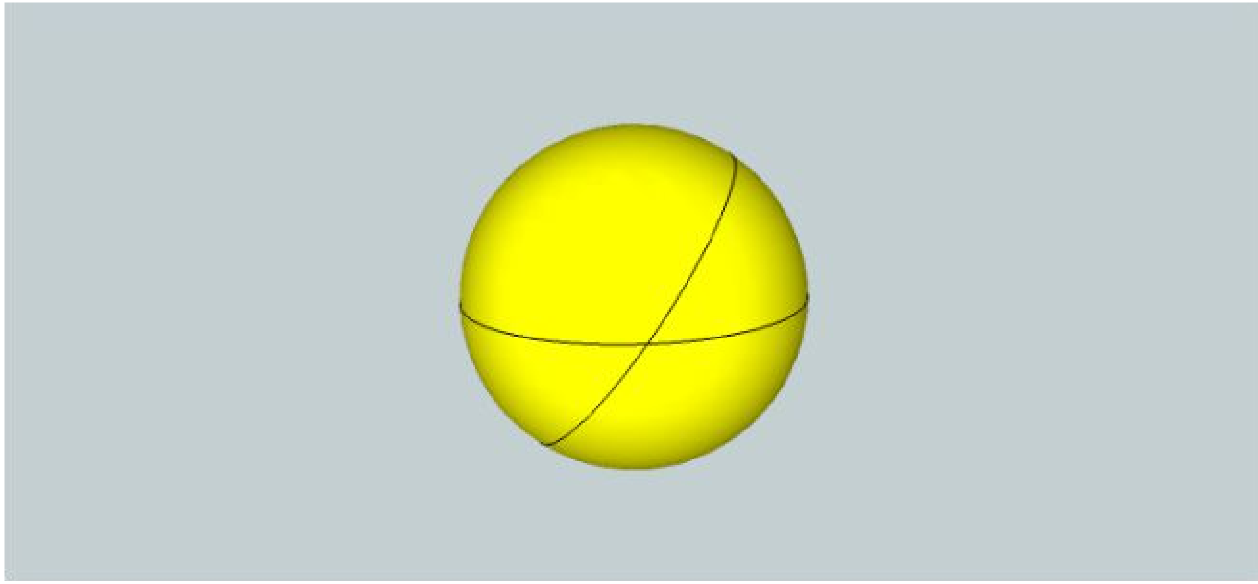


Deux plans passant par le centre de la sphère

Un peu de vocabulaire et de géométrie sphérique...

Il faudra donc une autre méthode pour déterminer les géodésiques de la sphère. C'est ici qu'entrent en scène les méridiens.

On appelle *grand cercle* de la sphère tout cercle obtenu comme intersection de la sphère par un plan contenant le centre de la sphère. On a représenté ci-dessous deux découpes de la sphère par de tels plans.



Les grands cercles déterminés par les deux plans

Un peu de vocabulaire et de géométrie sphérique...

Sur la terre, l'équateur est un grand cercle (mais pas les autres parallèles). Les méridiens sont des demi-grands cercles passant par les deux pôles.

Si on se donne deux points A et B sur la sphère, il passe au moins un grand cercle par ces points. En notant O le centre de la sphère, ce grand cercle est l'intersection de la sphère et d'un plan contenant O, A et B.

Si A et B ne sont pas antipodaux, il existe un seul plan contenant O, A et B, et donc un seul grand cercle passant par A et B.

Sinon il existe une infinité de plans, et donc une infinité de grands cercles. Par exemple, le pôle Nord et le pôle Sud sont antipodaux, d'où l'existence d'une infinité de méridiens.

Les géodésiques de la sphère...

L’importance des grands cercles dans la question des géodésiques est due au résultat suivant.

Théorème - *Quand A et B ne sont pas antipodaux, il y a une seule géodésique reliant A à B : c’est le plus court des deux arcs de grand cercle.*
Quand ils sont antipodaux, tous les demi-grands cercles passant par ces points sont des géodésiques.

Il y a plusieurs manières de démontrer ce théorème, mais aucune n’est particulièrement élémentaire et nous l’admettrons.

Nous avons maintenant assez de connaissances pour énoncer et prouver la *formule de Gauss-Bonnet* (connue aussi dans ce contexte de géométrie sphérique comme le *théorème de Girard*) : cette formule est la clé du problème posé à nos fourmis : accéder à des données spatiales en ne faisant que des mesures sur des surfaces.

La formule de Gauss-Bonnet

La formule de Gauss-Bonnet est un résultat général qui fait le lien entre la courbure d'un triangle géodésique et la somme de ses angles.

Cette somme est plus petite que π quand le triangle est tracé sur une surface à courbure négative comme un hyperboloïde (la forme des cheminées des centrales nucléaires mais aussi celle de cette tour de Canton, pendant quelques mois la plus haute du monde).

Source : site de Serge Mehl

La formule de Gauss-Bonnet

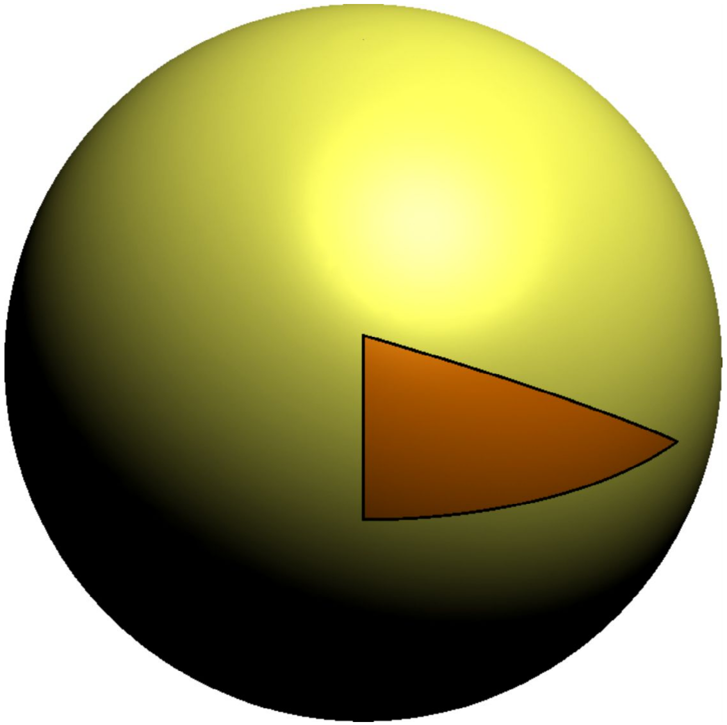
Elle est plus grande pour les surfaces à courbure positive comme la sphère ou les ellipsoïdes (sphère « ovalisée »), et égale à π quand la courbure est nulle (plan, cone, cylindre...).

Un quasi-ellipsoïde pour sportifs...
Source : site de Serge Mehl

La formule de Gauss-Bonnet

Dans le cas particulier de la sphère, l'énoncé est extrêmement simple : si on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle,

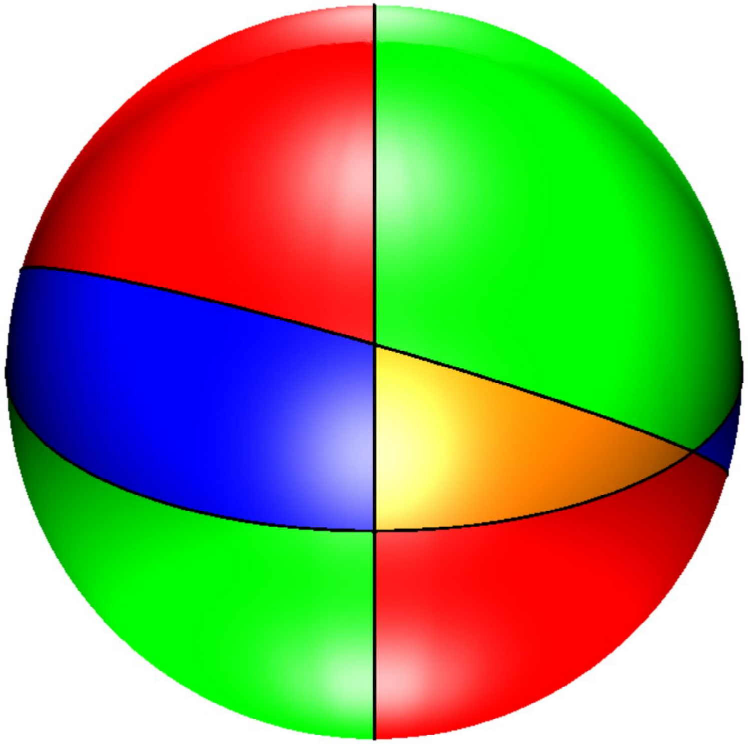
$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\mathcal{A}}{R^2}.$$



La formule de Gauss-Bonnet

Pour prouver cette formule, nous allons découper la sphère en prolongeant les côtés de chaque triangle pour tracer les grands cercles correspondants.

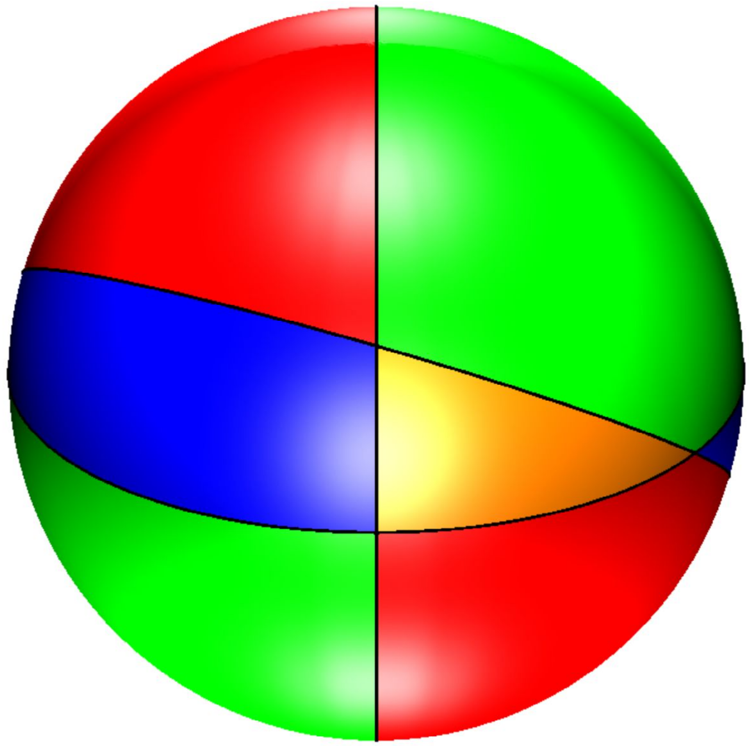
Ces tracés coupent la sphère en huit zones deux à deux opposées (ou antipodales) : colorons les en choisissant la même couleur pour les zones opposées.



La fourmi sur la sphère

Chaque fois que l'on réunit un des triangles et la zone rouge, verte ou bleue qui le borde, on obtient un quartier de la sphère.

L'aire de ce quartier est proportionnelle à l'angle d'ouverture, qui est l'un des angles du triangle.



La formule de Gauss-Bonnet - Calcul d'aires

Appelons α l'angle d'ouverture d'un des deux quartiers « *vert et orange* » (le plus grand des trois angles du triangle).

L'aire de ce quartier est égale, par proportionnalité, à

$$\mathcal{S}_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \times 4\pi R^2 = 2\alpha R^2.$$

En effet, si α valait 2π, le quartier serait la sphère entière, et donc aurait pour aire $4\pi R^2$.

(C'est le même raisonnement qui montre que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle d'ouverture de cet arc).

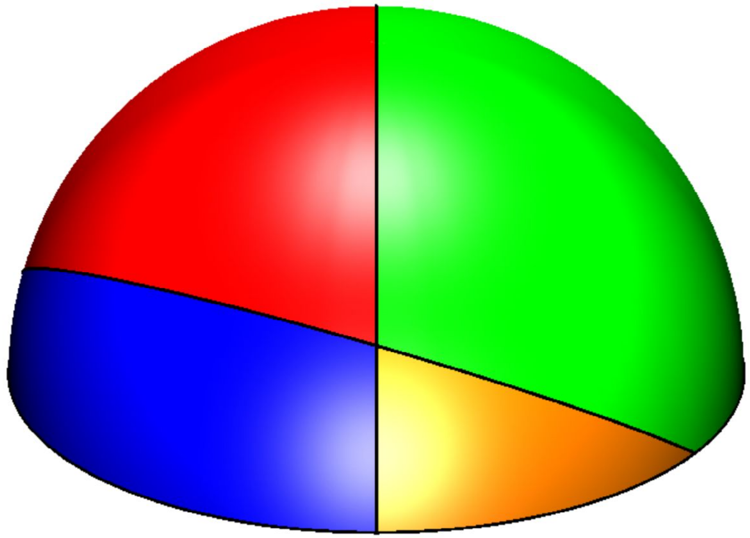
Utilisons la même formule pour les autres quartiers (avec les angles β et γ) et additionnons les résultats.

On obtient :

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2.$$

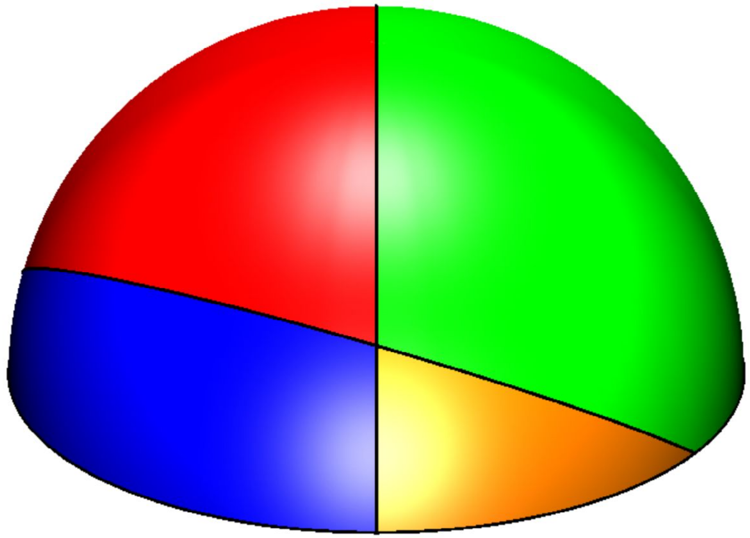
Le partitionnement de la demi-sphère

Si on réunit le triangle orange et chacune des zones verte, bleue et rouge situés dans la demi-sphère supérieure, on obtient un « partitionnement » de cette demi-sphère.



Le partitionnement de la demi-sphère

Si on réunit le triangle orange et chacune des zones verte, bleue et rouge situés dans la demi-sphère supérieure, on obtient un « partitionnement » de cette demi-sphère.



La formule de Gauss-Bonnet - Calcul d'aires

Appelons $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ les aires des zones verte, bleue et rouge.
Puisque le quartier vert et orange est la réunion du triangle et de la zone verte, on a

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{V} + \mathcal{A}.$$

En faisant le même calcul pour les deux autres quartiers, on obtient

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{B} + \mathcal{A},\ \mathcal{S}_3 = \mathcal{R} + \mathcal{A},$$

qui permet d'écrire une deuxième expression de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$:

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 = \mathcal{V} + \mathcal{B} + \mathcal{R} + 3\mathcal{A} = (\mathcal{V} + \mathcal{B} + \mathcal{R} + \mathcal{A}) + 2\mathcal{A}$$

La somme entre parenthèses est la somme des aires des quatre zones partitionnant la demi-sphère, et elle est donc égale à

$$\mathcal{V} + \mathcal{B} + \mathcal{R} + \mathcal{A} = 2\pi R^2.$$

La formule de Gauss-Bonnet

Comparant les deux expressions obtenues pour $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$, on obtient

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 = 2(\alpha + \beta + \gamma) \times R^2 = 2\pi R^2 + 2\mathcal{A},$$

d'où

$$\mathcal{A} = (\alpha + \beta + \gamma)R^2 - \pi R^2 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2,$$

qui prouve la formule annoncée plus haut :

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\mathcal{A}}{R^2}.$$

Au tour des fourmis

Fortes de cette connaissance, les fourmis n'ont plus qu'à sortir double décimètre et rapporteur, et se lancer dans le calcul de la surface et des angles du triangle géodésique qu'elle ont délimité avec leur ficelle...

Après des années de labeur, elles obtiendront peut-être les valeurs suivantes :

- La somme des angles vaut $180{,}000732^\circ$.
- L'aire du triangle vaut 523 km^2.

Elles pourront alors fièrement dire quel est le rayon de la planète sur laquelle elles vivent, en n'ayant pour cela mesuré que des figures à une ou deux dimensions.