Manipuler, expérimenter, verbaliser, abstraire.

Journées de l'IREM de Bordeaux
Talence le 7 novembre 2018

Groupe didactique IREM d'Aquitaine

Manipuler, expérimenter, verbaliser, abstraire.

« L’école est le seul endroit où l’on doit répondre à des questions que l’on ne se pose pas ! »

Catherine Darrouzet IPR de Lettres

Quels sont les points essentiels sur lesquels l’enseignant doit exercer sa maîtrise lors du déroulement d’une séance en classe?

Quelle est la place de l'élève dans la construction collective du savoir ?

Un exemple

Les fonctions au collège

Fabriquer un parcours d'étude

1) Les programmes
2) Éclairage didactique
3) Comment permettre à l'élève de prendre part à la construction collective du savoir ?
    a) Le choix des situations
    b) Le choix de la progression
    c) La gestion de la classe
    d) L'institutionnalisation.

Les programmes

Connaissances

Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image ;

- différents modes de représentation d'une fonction

• expression symbolique,
• tableau de valeurs,
• représentation graphique,
• programme de calcul;

- notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$;

- fonction linéaire, fonction affine.

Les programmes

Compétences associées

- passer d’un mode de représentation d’une fonction à un autre ;
- déterminer, à partir d’un mode de représentation, l’image ou un antécédent d’un nombre par une fonction ;
- représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
- modéliser un phénomène continu par une fonction ;
- modéliser une situation de proportionnalité à l’aide d’une fonction linéaire ;
- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

Éclairage didactique

Une fonction peut être un outil pour résoudre des problèmes ou un objet d'étude pour elle même.

- Étudier les fonctions comme outils c'est les utiliser pour modéliser des situations fonctionnelles et répondre à des questions d'optimisation, de comparaison (tarif le plus avantageux) etc....

- Étudier les fonctions comme objets c'est en étudier les propriétés mathématiques en faisant des catégories (les fonctions croissantes, les fonctions linéaires, les fonctions continues, etc.)

Éclairage didactique

La notion de fonction est introduite, progressivement, comme un outil nécessaire pour résoudre des problèmes, l'objet se construisant au fur et à mesure des rencontres dans différents contextes. Quand l'outil aura prouvé son caractère incontournable, il conviendra alors de lui donner une existence en tant qu'objet en le nommant et d'en commencer l'étude, pour lui même.

Éclairage didactique

Une fonction peut être envisagée comme un processus ou comme une structure.

Dans un premier temps, l'élève peut acquérir la conception d'une fonction comme un processus qui permet de trouver l'image quand on a la valeur de la variable.

==> fonction outil

Éclairage didactique

Dans un deuxième temps ce processus pourra être identifié, généralisé et désigné par un nom, de sorte qu'on pourra lui donner certains attributs (sa représentation graphique, quelques propriétés).

Dans un troisième temps, l'objet fonction pourra se dégager du simple processus. Il sera alors intégré à une catégorie dont on peut étudier les propriétés (ex : fonction croissante) et dont on peut avoir des représentants (ex : fonction linéaire).
La fonction prend ainsi un statut structural.

==> fonction objet

Le programme dit :
En 5e, la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d’introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes.

Éclairage didactique

L’étude des différents registres dans lesquels les fonctions s’expriment, formules algébriques, programmes de calculs, tableaux de valeurs, graphiques (construction et lecture) peut être initiée tout au long du collège.

La classe de troisième sera le niveau où le concept de fonction sera nommé en tant que tel et où commencera l’étude de l’objet fonction et de quelques uns de ses attributs (notations, vocabulaire spécifique). Une conception structurale des fonctions émerge alors parallèlement à la conception procédurale initiale.

Comment permettre à l'élève de prendre part à la construction collective du savoir ?

Place des élèves…

L’activité mathématique des élèves doit être engendrée par la nécessité du fonctionnement des mathématiques elles mêmes, et non par une injonction scolaire.

Il faut qu’une place soit donnée aux questions des élèves dans chaque séance, ainsi qu’aux idées qu’ils peuvent apporter pour répondre à des questions amenées par l’enseignant, ou par eux-mêmes.

Comment permettre à l'élève de prendre part à la construction collective du savoir ?

Place du professeur...

Le professeur doit accepter l'idée que maîtriser n'est pas toujours imposer :

- Faire confiance aux élèves
- Les entendre
- Les aider à s’écouter
- Les aider à dialoguer entre eux
- Accepter de ne pas toujours diriger ou orienter
- Fournir les outils en fonction des besoins
- Organiser, anticiper.

a) le choix des situations

Le parcours que nous proposons s'appuie sur la question suivante : comment étudier la dépendance entre deux grandeurs pour décrire, prévoir, anticiper, comparer, améliorer ?

- **Décrire** : le lien de dépendance entre les deux grandeurs (variable, images, illustration graphique)

- **Prévoir**, anticiper : connaître l'issue d'une expérience sans avoir besoin de la réaliser (prévoir une valeur particulière, résoudre une équation).

- **Comparer** (distances connaissant la loi horaire, prix, résolutions d'équations, d'inéquations …)

- **Améliorer** (problèmes d'optimisation, résolutions d'équations pour obéir à une contrainte…)

a) le choix des situations

- On trouve dans tous les manuels des problèmes intéressants
- Destinés à être étudiés par les élèves seuls
- Aspect fermé de leur rédaction

- Les traiter directement en classe
- La richesse de ces problèmes
- Exploiter en détail les productions des élèves
- Mise en commun en classe

a) le choix des situations

Choisir un problème qui pose de vraies questions

- Il est suffisamment complexe
- Il nécessite d'utiliser «l'outil fonction»
- Son contexte est suffisamment dépouillé, facilitant la modélisation (attention aux problèmes de la vie courante)
- Il incite les élèves à se poser des questions
- Il s'appuie sur des connaissances antérieures
- Il permet les apports sur les fonctions par le professeur.

b) le choix de la progression

- Donner du sens dès la première rencontre
- Permettre un enchaînement de questions qui se nourrissent des réponses précédentes
- Articuler les étapes pour rendre disponibles les outils nécessaires
-

C’est cet enchaînement, construit à partir des questions initiées par la situation de départ choisie par le professeur, puis posées par les élèves eux mêmes qui va constituer le Parcours d’Etude et de Recherche.

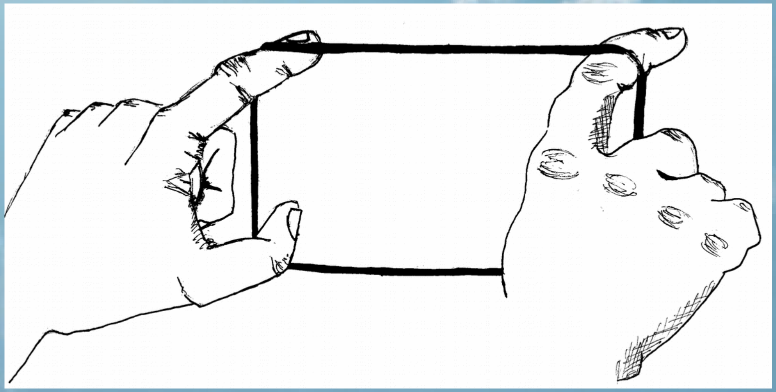
Ce parcours étant jalonné de situations dont la logique d’enchaînement est en partie dictée par la progression des élèves dans la connaissance de l’outil fonction.

c) gestion de la classe
d) institutionnalisation

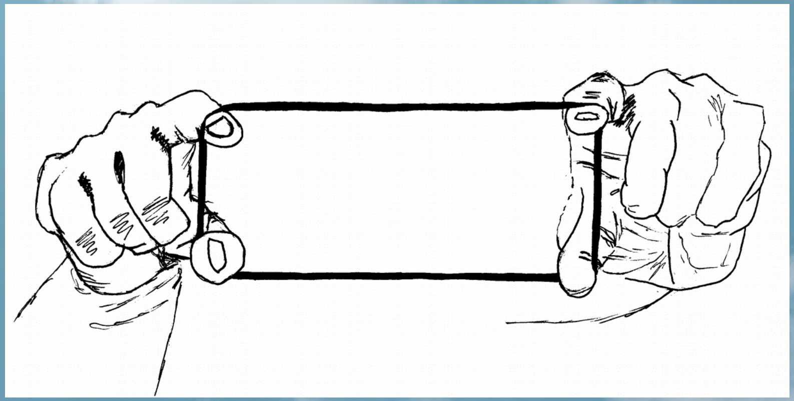
La ficelle en cycle 4

Les rectangles de même périmètre

Le professeur utilise une ficelle dont il noue les deux extrémités. A l’aide des doigts, en écartant l’index et le pouce , il forme des rectangles.



ce que fait le prof



ce que voit l’élève

Le professeur pose la question suivante : Vous voyez beaucoup de rectangles, qu’ont ils de pareil ? Qu’est ce qui change ?

VERBALISER

A propos du périmètre

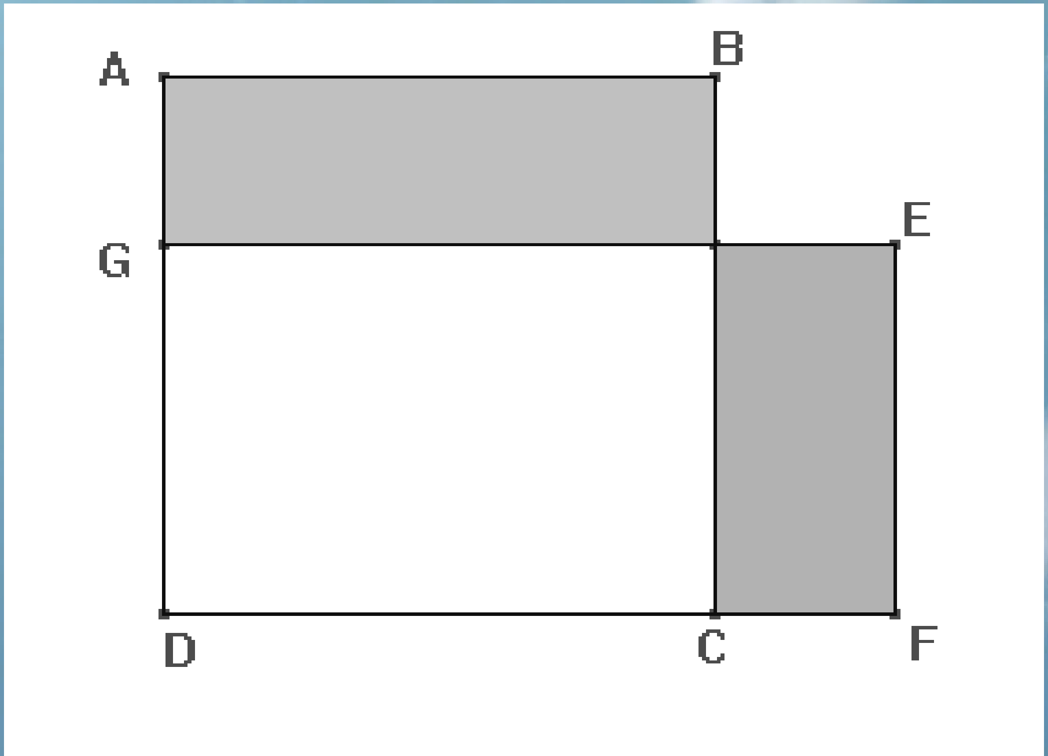
Les élèves disent que les rectangles ont le même périmètre qui est la longueur de la ficelle.

A propos de l'aire

Ils ont la même aire parce qu'ils ont le même périmètre .

Ils ont la même aire parce que cela se « compense » , « ce que l'on perd d'un côté , on le gagne de l'autre » .

Le rectangle ABCD et le rectangle GEFD ont le même périmètre et les élèves pensent qu’ils ont la même aire car ils croient que les deux parties grisées ont la même aire.



EXPERIMENTER

Étape 2 : S'approprier la figure

Dessiner 7 rectangles différents de périmètre 18 cm. Indiquer leurs dimensions. On utilisera du papier quadrillé 0,5 cm sur 0,5 cm

Choix didactique

Longueur de 18 cm

Dessiner 7 rectangles

Le professeur collecte les dimensions de tous les rectangles

Longueur	8	7	5	6	4,5	6,5	3,9
Largeur	1	2	4	3	4,5	2,5	5,1

Discussion sur l'intitulé des deux lignes du tableau

La symétrie de la situation.

Le professeur peut suggérer d'appeler le premier côté x et l'autre y

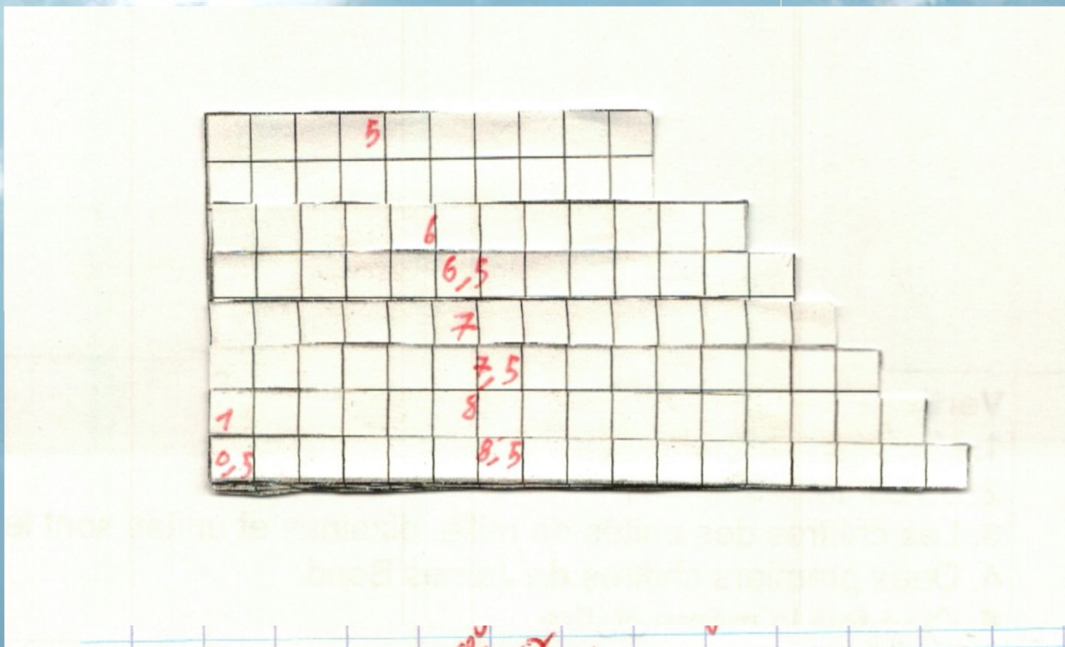
Les élèves proposent $x + y = 9$

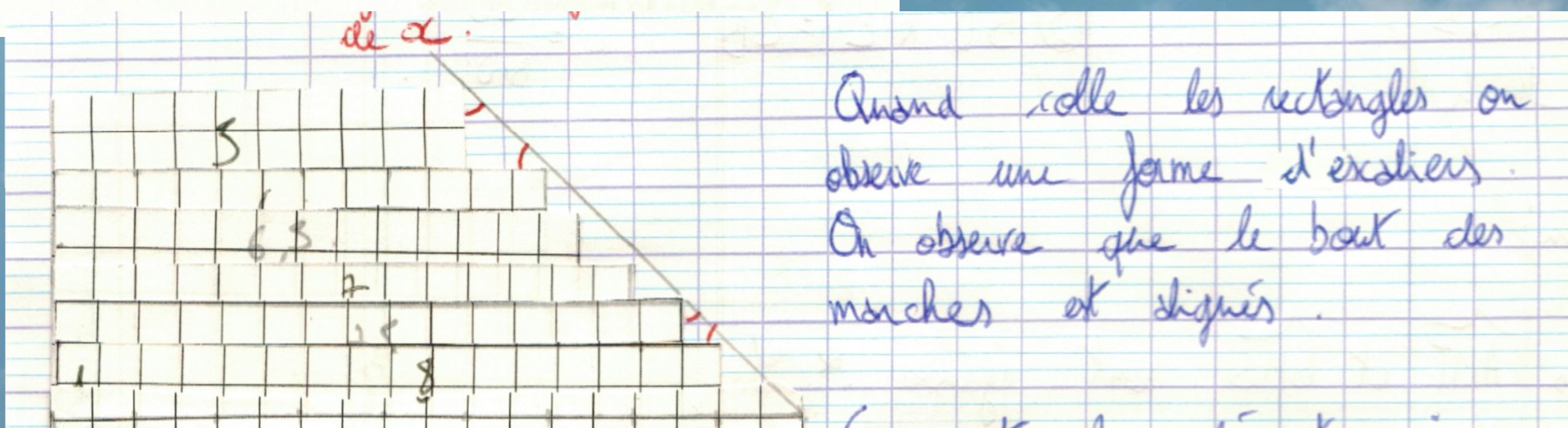
On peut calculer y quand on connaît x par la formule $y = 9 - x$

Étape 3 : La construction sur le papier

Le professeur demande ensuite aux élèves de dessiner les rectangles puis de les découper et de les rassembler en les superposant.

MANIPULER


5
6
6,5
7
7,5
8
8,5
1
0,5

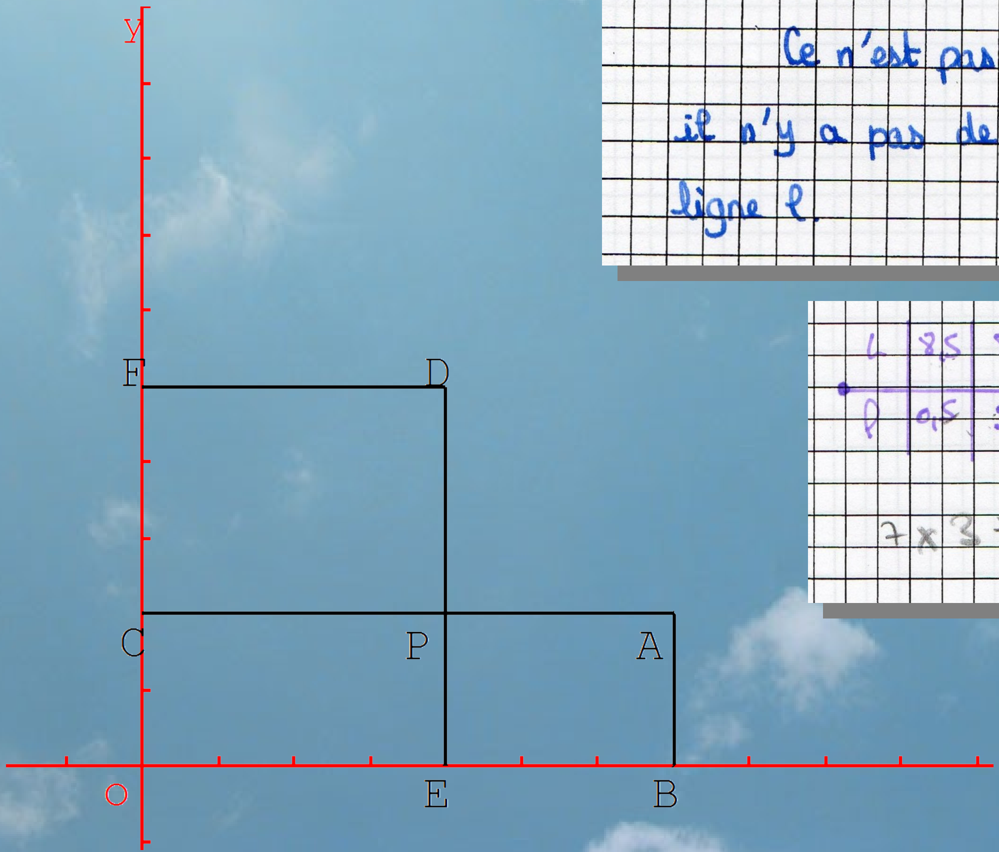

de x
5
6,5
7
8
Quand colle les rectangles on observe une forme d'escaliers.
On observe que le bout des marches est alignés.

De nouvelles questions apparaissent

- *Pourquoi les sommets des rectangles sont-ils alignés?*
- *Pourquoi obtient-on cet alignement ?*
- *Y a-t-il proportionnalité ?*

- Proportionnalité
- Les Angles
- Thalès
- Pythagore

VERBALISER



L	5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
l	4	3	2,5	2	1,5	1	0,5

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité car il n'y a pas de relation récurrente entre la ligne L et la ligne l.

L	8,5	8	7	6	5,5	5	4
l	0,5	1	2	3	3,5	4	4,5

$7 \times 3 \div 6 =$ __

pas proportionnelle.

Les démonstrations

ABSTRAIRE

Par les angles

Les deux rectangles ont pour périmètre 18 .

On a donc

FD + DE = 9 et CA + AB = 9 .

Donc si AC = FD + h , AB = DE – h .

Le triangle DPA est isocèle et rectangle, donc la droite (AD) forme un angle de 45° avec l’axe des abscisses.

ABSTRAIRE

Les démonstrations

Par Thales

Ce que l'on sait :

Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en R.

Les segments [AB] et [DE] sont parallèles ([AB] // [DE])

Les points R, B et E sont alignés dans le même ordre.

Calculons les rapports

Soit RB = x pour simplifier les calculs.

Écrivons les différentes longueur en fonction de x

RB = x; RE = 9 ; BA = x et OD = 9

Il est évident que les deux rapports sont égaux.

Il nous manque quelle condition :

Les points R, A et D sont alignés dans le même ordre

ABSTRAIRE

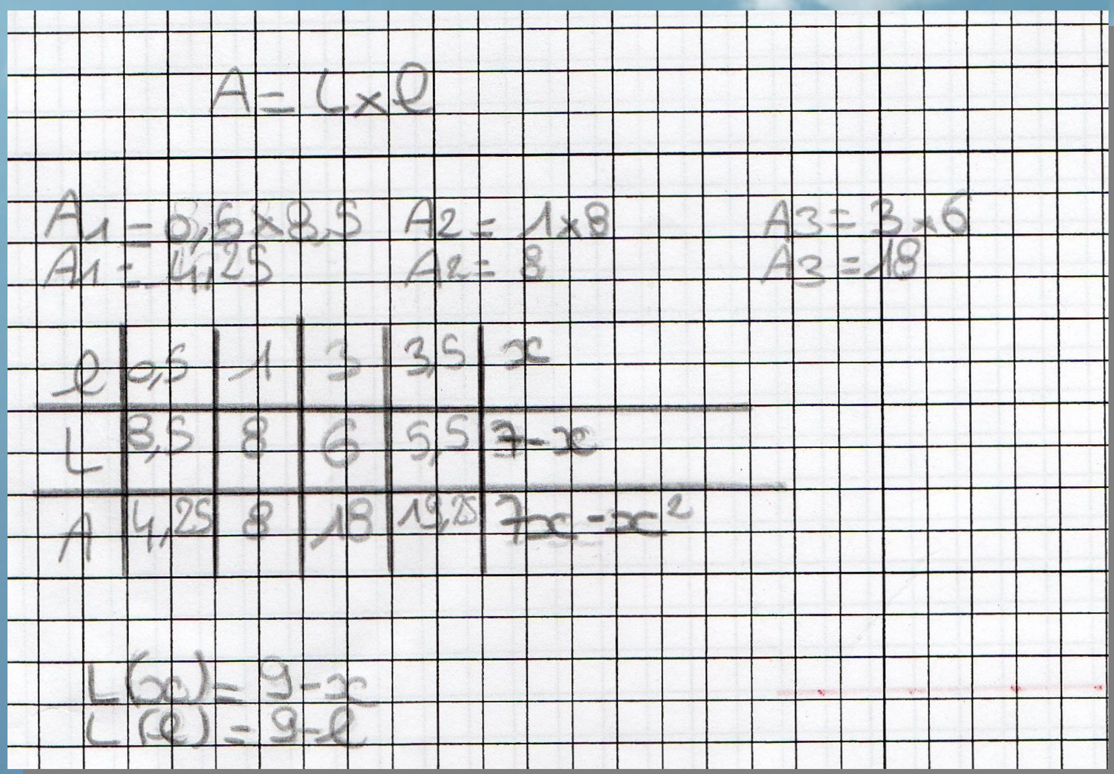
Les démonstrations

Par Pythagore

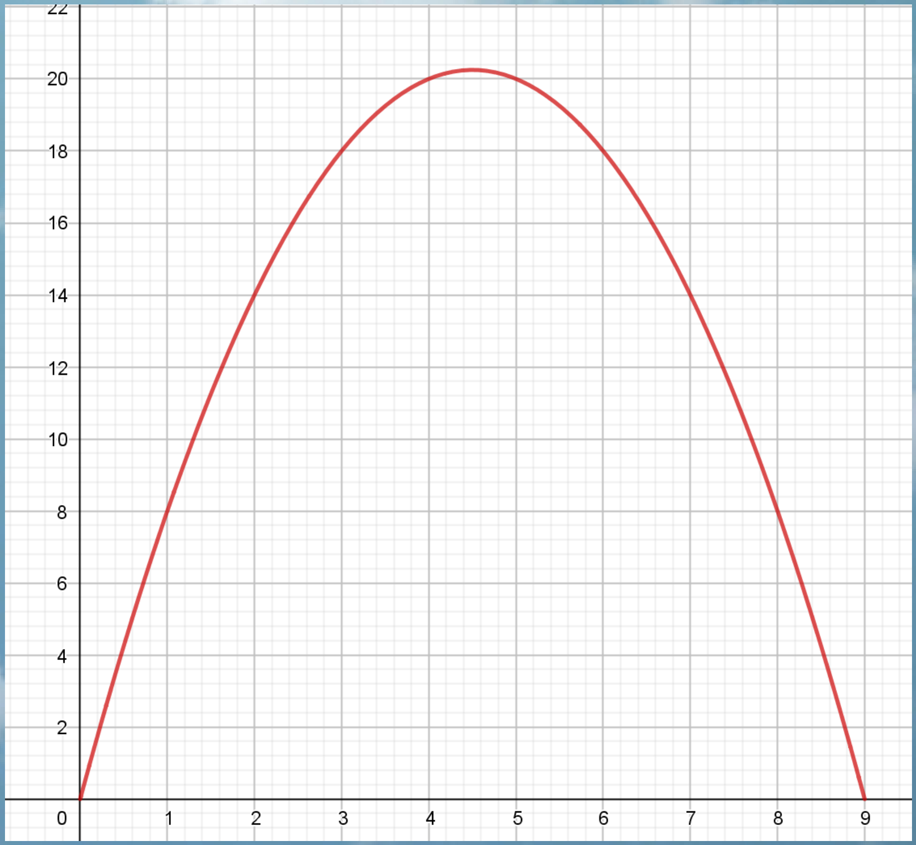
Soit RB = x pour simplifier les calculs.
Ce que l'on sait :
ABR rectangle en B alors d'après le théorème de Pythagore $AR^2 = 2x^2$
DOR rectangle en O alors d'après le théorème de Pythagore $DR^2 = 2\times 9^2$
CD = 9 - x et CA = 9 - x
DCA rectangle en C alors d'après le théorème de Pythagore $DA^2 = 2(9-x)^2$
Vérifions l'égalité des longueurs de [DR]
on peut observer que toutes les longueurs sont multipliées par deux, on peut donc simplifier les calculs.
DR' = 9 , AR' = x et DA' = 9 - x

Les points R, A et D sont alignés.

- Les élèves calculent les aires des différents rectangles et les rangent dans une troisième ligne du tableau de valeurs ou dans un second tableau.
- On peut alors s'intéresser au rectangle qui a l'aire la plus grande.



•Les élèves tracent l'aire des rectangles en fonction d'une des dimensions



Bilan de la situation

- Cette activité a permis de voir des exemples de fonctions
- A chaque valeur de la variable x on peut associer une valeur d'une autre quantité (longueur, périmètre, aire…)
- On dit que cette quantité est une fonction de x
- On étudie la variation de cette quantité

Les différents registres

- On peut utiliser un tableau de valeurs
- On peut faire un graphique
- On a utiliser une formule
- On a lu un texte
-

Compétences du programme

- passer d’un mode de représentation d’une fonction à un autre ;
- déterminer, à partir d’un mode de représentation, l’image ou un antécédent d’un nombre par une fonction ;
- représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
- modéliser un phénomène continu par une fonction ;
- modéliser une situation de proportionnalité à l’aide d’une fonction linéaire ;
- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

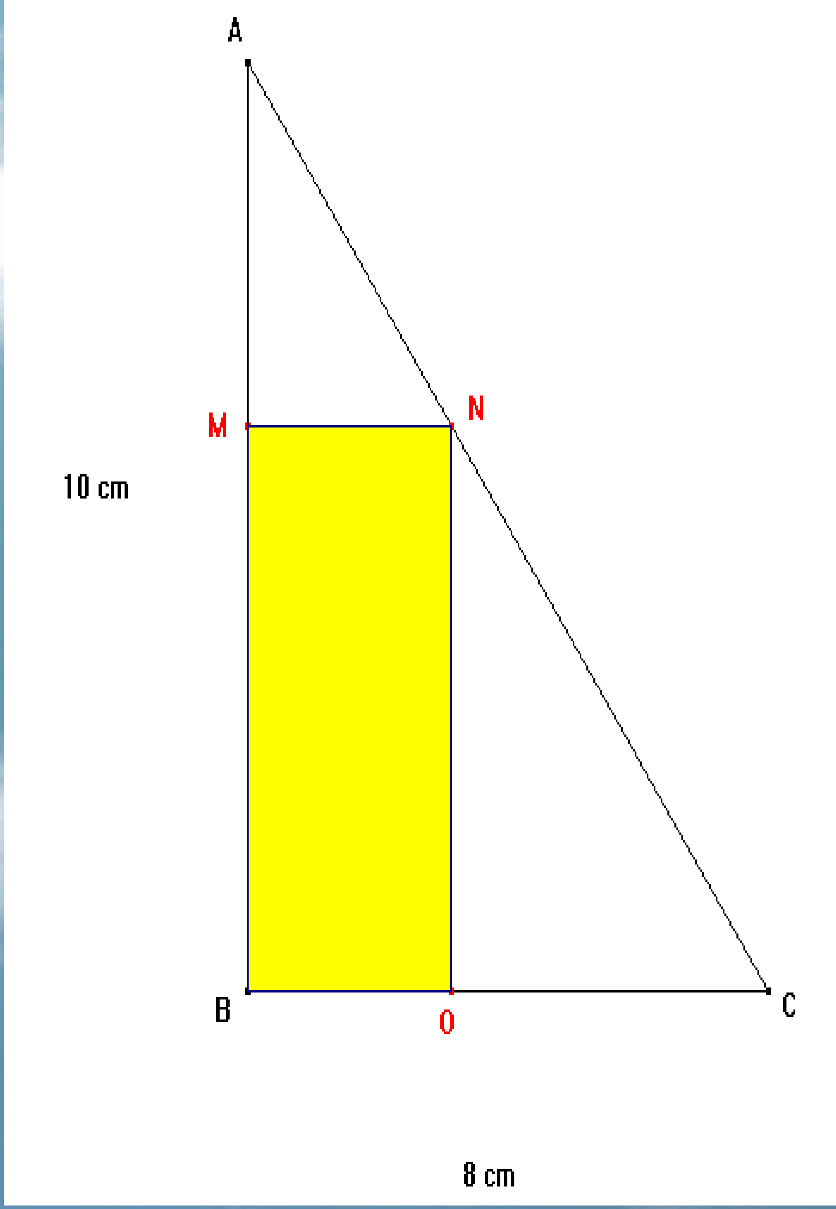
c) gestion de la classe
d) institutionnalisation

Le rectangle qui bouge en 3°

Étape 1 : S’approprier la figure

Présentation de la figure suivante avec un vidéo-projecteur.

Les dimensions ont été choisies pour ne pas surcharger les calculs.



EXPERIMENTER

Les consignes pour la construction :

ABC est un triangle rectangle en B avec :
AB = 10 cm et BC = 8 cm.
Place un point M quelconque sur le segment [AB], n'importe où !
Trace la perpendiculaire à (AB) passant par M.
Elle coupe [AC] en N.
Trace la perpendiculaire à (BC) passant par N.
Elle coupe [BC] en O.

2 points M différents sont demandés.

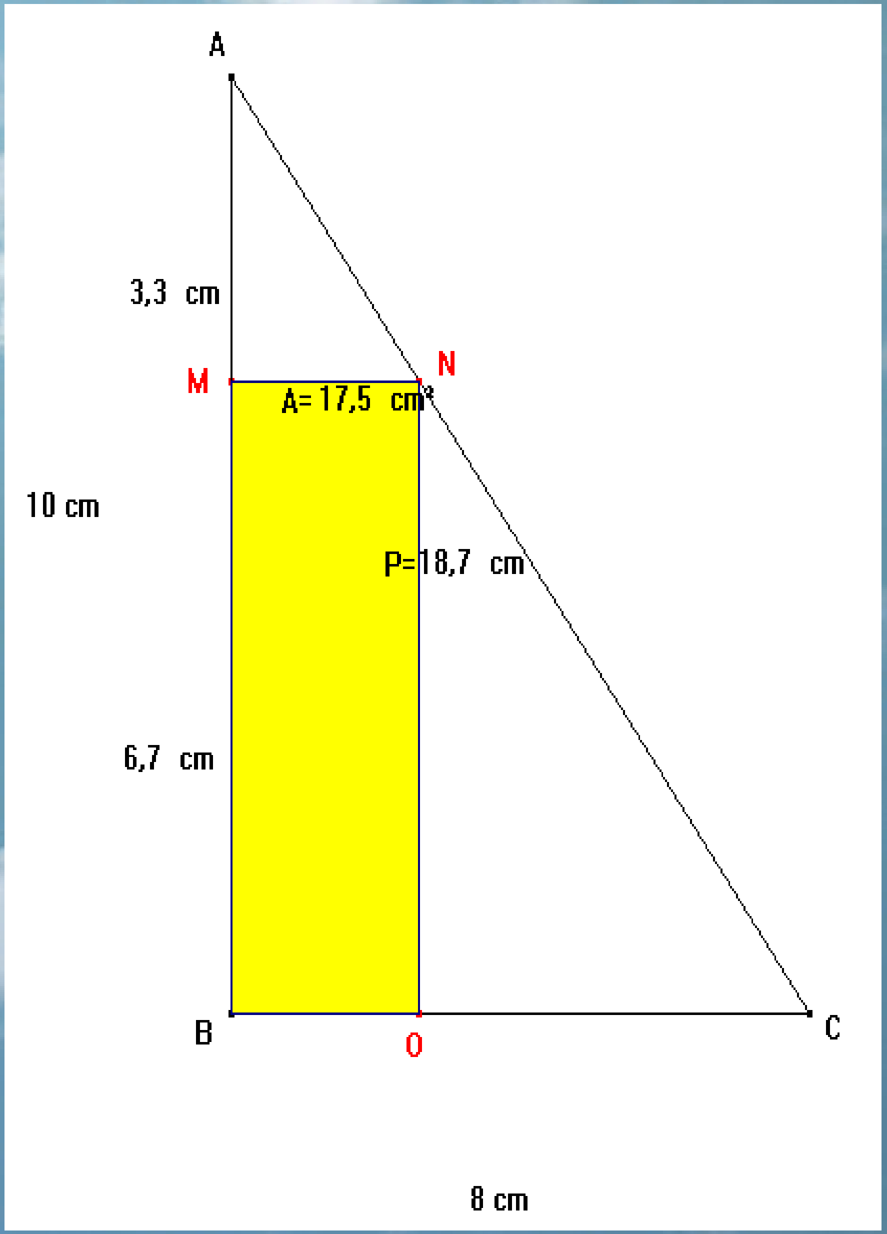
Question à la classe : *quand le point M s’est déplacé, qu’est qui a changé sur la figure et qu’est ce qui n’a pas changé ?*

Réponses :

- *le point N bouge*
- *le point O bouge*
- *le rectangle MNOB se déforme*
- *les triangles AMN et NOC changent*
- *les droites (MN) et (BC) restent parallèles ainsi que les droites(AB) et (NO)*
- *les angles droits restent des angles droits*
- *…*

VERBALISER

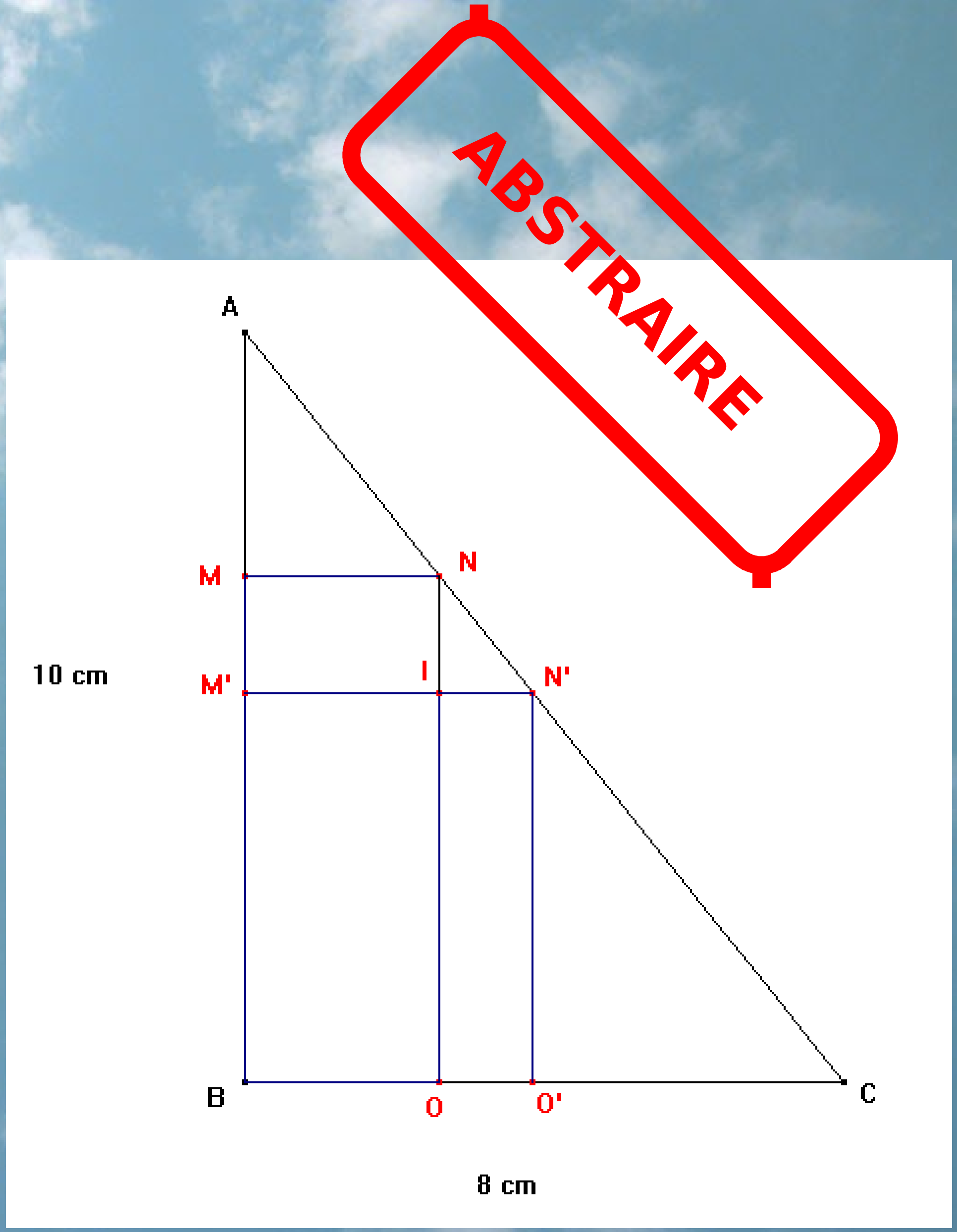
Étonnement :
les longueurs changent ,
l'aire aussi
mais, plus surprenant,
le périmètre change
aussi.



<u>Explication à l’aide d’un schéma au tableau :</u>
ce que l’on gagne sur [MN] est plus petit que ce que l’on perd sur [NO].

On a IN > IN’ car 10>8.

Certains utilisent les cas limites.



VERBALISER

Conjectures :

Quand le point M se déplace de A vers B :

- la longueur AM augmente
- la longueur MB diminue
- la longueur MN augmente
- le rectangle MNOB peut être un carré
- si le triangle ABC était isocèle-rectangle le périmètre de MNOB ne changerait pas.
- le périmètre de MNOB ne change pas ou diminue l'aire de MNOB ne change pas ou augmente puis diminue et c'est quand MNOB est un carré que l'aire est la plus grande.

ABSTRAIRE

Étape 3 : écritures littérales

Après discussion, on décide d’appeler x la longueur AM et il est demandé aux élèves d’écrire, en fonction de x :

- la longueur MB
- la longueur MN
- le périmètre P du rectangle MNOB
- l’aire A du rectangle MNOB

MANIPULER

<u>**Travail à la maison :**</u> choisir 5 valeurs de *x* et calculer les valeurs correspondantes de MN, de *P* et de *A*.

Le lendemain… les élèves ont fait leur travail mais aucun n'a pensé à regrouper les résultats dans un tableau ou dans plusieurs tableaux.

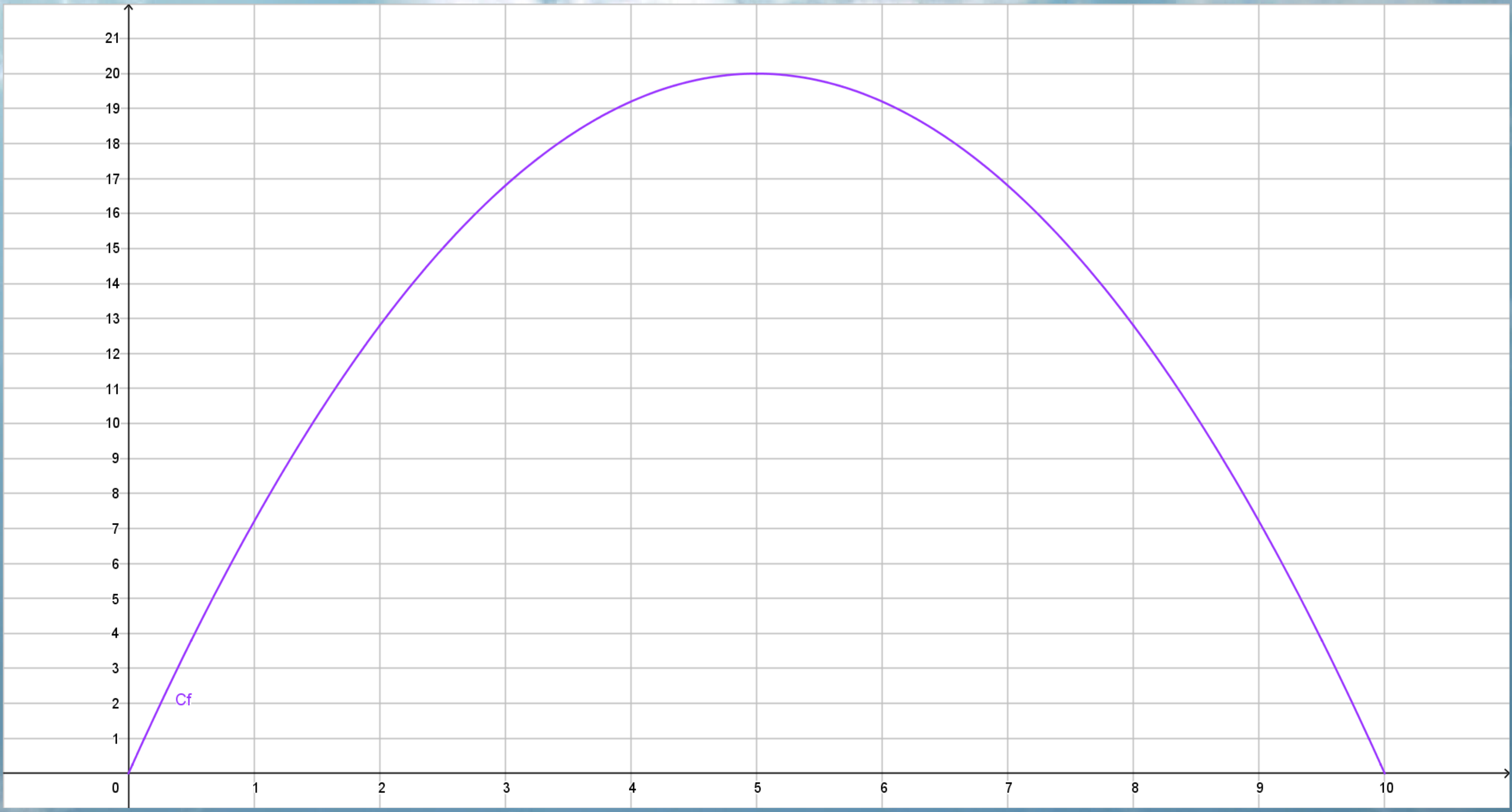
Étape 4 : tableaux

Comment pourrait-on présenter les résultats de façon plus claire ? L'idée de tableau vient tout de suite.

Trois tableaux sont dressés, un pour chaque fonction

$MN = 0{,}8\,x$ $P = 20 - 0{,}4\,x$ et $A = 8x - 0{,}8x^2$.

Le document suivant est alors distribué, en précisant que la courbe a été obtenue avec Géogébra .



EXPERIMENTER

<u>Consigne 1 :</u> *par lecture graphique, trouver la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale. Préciser la position correspondante du point M. Trouver la valeur de l'aire correspondante par lecture graphique puis par le calcul.*
Dire ce que vous pensez de la conjecture faite en début d'étude : « l'aire est maximum quand le rectangle est un carré ».

Pas de problème pour la lecture graphique. Certains élèves ne pensent pas à remplacer x par 5 dans les expressions de MB et de MN pour savoir si MNOB est alors un carré. L'un d'eux revient au dessin et trace la figure dans le cas où $x = 5$ et observe que le rectangle n'est pas un carré.

La conjecture est facilement rejetée.

Consigne 2 : *Par lecture graphique trouver les valeurs de l'aire pour successivement : $x = 0,5$; $x = 3,5$; $x = 6,5$; $x = 9,5$. Retrouver ces valeurs par le calcul.*

Les élèves s'aperçoivent vite que la lecture graphique est ici délicate car pour $x = 0,5$ les propositions pour l'aire sont : 4 ou 3,9 ou 3,8. Seul le calcul permet de trancher.

Consigne 3 : *Par lecture graphique trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire est égale à 15 cm².*

Les élèves se rendent compte que pour chaque valeur de l'aire il y a deux antécédents et que la courbe présente un axe de symétrie « qui passe par le maximum ».

ABSTRAIRE

<u>Consigne 4 :</u> *Quelle est la valeur de x pour laquelle le rectangle est un carré ?Quelle est alors la longueur du côté et quelle est l'aire du carré ?*

Certains élèves ont du mal à traduire le fait que MNOB est un carré par la condition : MN = MB.

Quelques uns cherchent une condition faisant intervenir le périmètre.

Une fois que l'équation $0,8x = 10 – x$ est posée de nombreux élèves rencontrent des difficultés à la résoudre ! Ces difficultés sont liées à la soustraction, à la présence d'un décimal et à la nécessité d'écrire x sous la forme 1 x x pour pouvoir réduire (il n'est pas habituel d'avoir à effectuer $0,8x + x$ et les erreurs sont nombreuses).

La solution non-décimale les surprend aussi ! $\frac{10}{1,8} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9}$

Un bilan de cette étude qui a duré trois séances est alors écrit :

Cette activité a permis de voir un exemple de fonction.

A chaque valeur de la variable x on peut associer une valeur d'une autre quantité (longueur, périmètre, aire…). On dit que cette quantité est une fonction de x.

On étudie la variation de cette quantité . Pour cela on peut utiliser un tableau de valeurs ou une représentation graphique.

Compétences du programme

•passer d’un mode de représentation d’une fonction à un autre ;
•déterminer, à partir d’un mode de représentation, l’image ou un antécédent d’un nombre par une fonction ;
•représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
•modéliser un phénomène continu par une fonction ;
•modéliser une situation de proportionnalité à l’aide d’une fonction linéaire ;
•résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

21 MESURES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

par Cédric Villani,
député de l'Essonne
et Charles Torossian,
inspecteur général
de l'éducation nationale

Rapport remis
le 12 février 2018

RECOMMANDATIONS

6. **Les étapes d'apprentissage [M5]**

Dès le plus jeune âge mettre en œuvre un apprentissage fondé sur

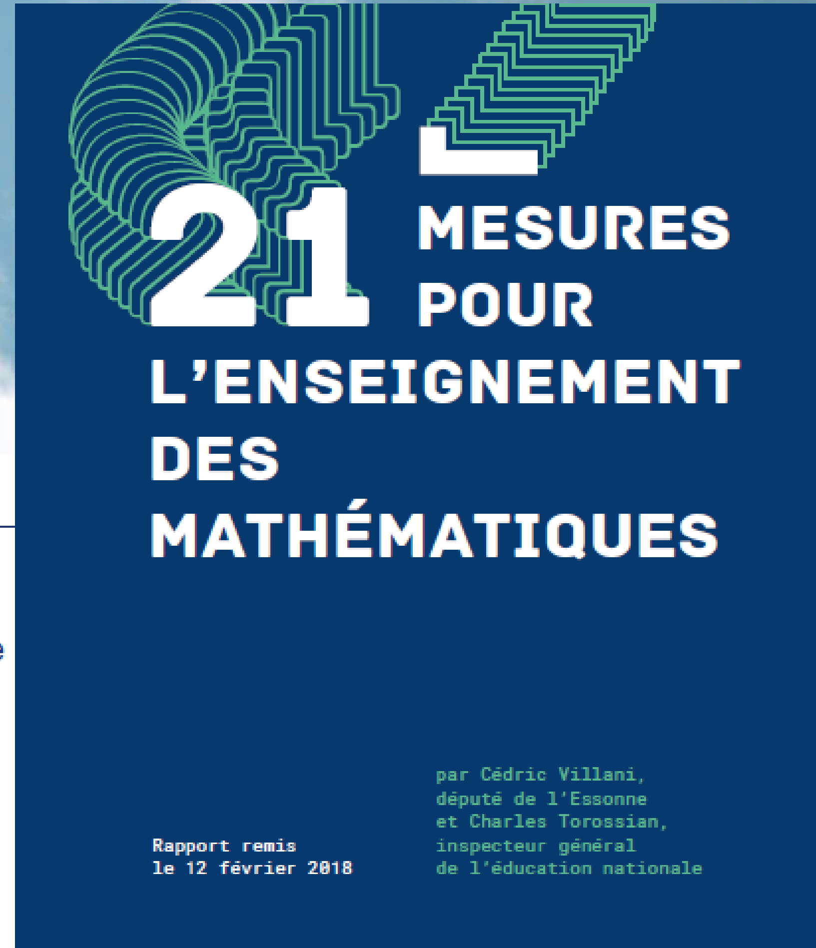
- la manipulation ;
- la verbalisation ;
- l'abstraction.

7. **Le cours [M6]**

Rééquilibrer les séances d'enseignement de mathématiques : redonner leur place

- au cours structuré et à sa trace écrite ;
- à la notion de preuve ;
- aux apprentissages explicites.

8. Proposer des traces écrites riches, pertinentes et aussi compréhensibles que possible (y compris par les familles). Le cours doit être exploitable et mobilisé par tous les élèves.



c) gestion de la classe
d) institutionnalisation

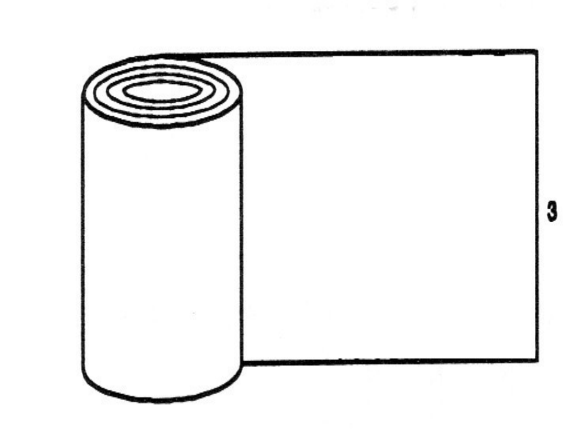
La bande qui se déroule

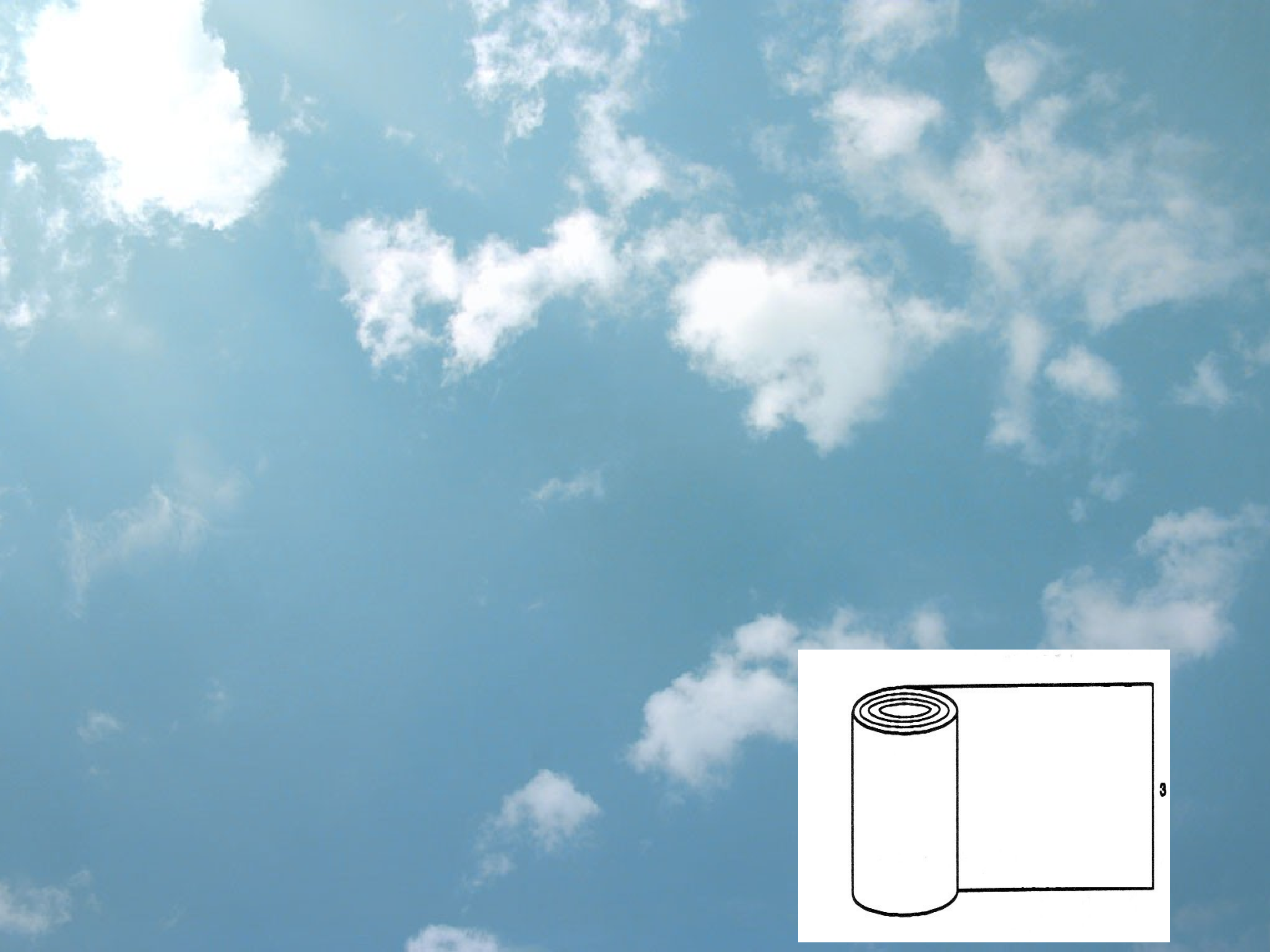
Étape 1 : Présentation de la situation

•*On considère une bande de papier de 12 cm de long et de 3 cm de large roulée sur elle-même. Vous voyez beaucoup de rectangles au fur et à mesure que je déroule.*

•*Qu'est-ce qui est fixe dans ces rectangles ?*

•*Qu'est-ce qui varie ?*




3

Extrait de la brochure
« fonctions du collège
de l'IREM d'Aquitaine.