Exercice 1 : Outils

Soit x un nombre réel. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{x+x}{x}, \quad x \neq 0$

   ▶ **Coup de pouce**

2. $\dfrac{x-x}{x}, \quad x \neq 0$

   ▶ **Coup de pouce**

3. $\dfrac{1}{-x+1} - \dfrac{3}{x-1}, \quad x \neq 1$

   ▶ **Coup de pouce**

4. $\dfrac{x+3}{4x-4} - \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$

   ▶ **Coup de pouce**

5. $\dfrac{1}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -3$

   ▶ **Coup de pouce**

Exercice 2 : Prouver qu'une suite est arithmétique

Dans chacun des cas suivants, prouver que le suite la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique.

On considère les suites (u_n) et (v_n), définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.
   Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

   ▶ **Coup de pouce**

2. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n + 2}$.
   Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

   ▶ **Coup de pouce**

Exercice 3 : Outils

Soit n un nombre entier naturel strictement positif. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A(n) = \dfrac{n^2}{n}$

   ▶ **Coup de pouce**

2. $B(n) = \dfrac{n}{3n}$

   ▶ **Coup de pouce**

3. $C(n) = \dfrac{n}{n^3}$

   ▶ **Coup de pouce**

4. $D(n) = \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

   ▶ **Coup de pouce**

5. $E(n) = \dfrac{n^2}{n+n^2}$

   ▶ **Coup de pouce**

6. $F(n) = \dfrac{n^2-9}{n+3}$

   ▶ **Coup de pouce**

7. $G(n) = \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2}$

   ▶ **Coup de pouce**

Exercice 4 : Calculs de limites

1. On considère la suite (u_n) définie par l'une des expressions suivantes, déterminer sa limite :
   (a) $u_n = \dfrac{n^3+3n+1}{5n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$
   ▶ **Coup de pouce**
   (b) $u_n = \dfrac{3n^3-5n^2+3n}{n^4+3n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}$
   ▶ **Coup de pouce**
   (c) $u_n = \dfrac{-2n^3+5n^2-7}{5n^3+3n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
   ▶ **Coup de pouce**
   (d) $u_n = \dfrac{n+3}{\sqrt{n}-1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
   ▶ **Coup de pouce**
   (e) $u_n = \dfrac{3n+2\sqrt{n}-1}{n^2+3}, \quad n \in \mathbb{N}$
   ▶ **Coup de pouce**

2. On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(a) Prouver que pour tout entier naturel n strictement positif, le terme u_n est minoré par $\sqrt{n}$.

▶ **Coup de pouce**

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

▶ **Coup de pouce**

<u>Exercice 5 : Outil</u>

1. ***Quantité conjuguée : de l'utilisation de l'identité remarquable*** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$***, où*** a ***et*** b ***sont deux nombres réels.***

   Compléter les égalités suivantes :

   (a) $(\sqrt{7} - 2)(\quad ... \quad) = 3$

   (b) $(3 + \sqrt{5})(\quad ... \quad) = -4$

   (c) $(\sqrt{n} - 1)(\quad ... \quad) = n - 1$

   (d) $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\quad ... \quad) = 1$

   (e) $(\sqrt{n^3} - \sqrt{n})(\quad ... \quad) = n(n-1)(n+1)$

2. ***De l'utilisation de l'égalité sur les nombres complexes*** $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$***, où*** a ***et*** b ***sont deux nombres réels.***

   Déterminer l'écriture algébrique des conjugués des nombres complexes suivants :

$a)\quad z = 1 + i$	$b)\quad z = 3 - 2i$	$c)\quad z = i$
$d)\quad z = 2i + 1$	$e)\quad z = -2i$	$f)\quad z = \dfrac{1}{2+i}$
$g)\quad z = \dfrac{1}{i}$	$h)\quad z = \dfrac{1}{2i}$	$i)\quad z = \dfrac{2-i}{i+1}$

<u>Exercice 6 : Transformations d'écritures</u>

1. (a) Prouver que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   ▶ **Coup de pouce**

   (b) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

   ▶ **Coup de pouce**

2. On pose $z = a + ib$ avec a et b deux réels et $Z = \dfrac{2z - 3}{i + 1}$

   (a) Exprimer les parties réelles et imaginaires de Z, en fonction de a et b.

   ▶ **Coup de pouce**

   (b) Déterminer la(les) valeur(s) de a et b pour la(es)quelle(s) Z est un nombre imaginaire pur.

   ▶ **Coup de pouce**

3. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $z_B = 1 + i$.

   Calculer la distance AB.

   ▶ **Coup de pouce**

4. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2}) - \frac{2}{1+x^2}$.

   (a) Prouver que : $\forall\ x\ \in\ ]0;+\infty[,\ \ h'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x(1+x^2)^2}$.

   ▶ **Coup de pouce**

   (b) En déduire les variations de h sur $]0;+\infty[$.

   ▶ **Coup de pouce**

Coups de pouce

Coup de pouce 1. : simplifier le numérateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 2. : simplifier le numérateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 3. : trouver un dénominateur commun en travaillant sur les signes.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 4. : trouver un dénominateur commun en multipliant l'un des dénominateurs par une constante.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 5. : trouver un dénominateur commun en constatant que : $x^2 + 3x = x(x+3)$ pour tout x réel.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 6. : prouver que la différence de deux termes consécutifs et quelconques de la suite (v_n) est égale à une constante.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 7. : prouver que la différence de deux termes consécutifs et quelconques de la suite (v_n) est égale à une constante.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 8. : simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 9. : simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 10. : simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 11. : $(\sqrt{n})^2 = n, n \geq 0$.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 12. : simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 13. : factoriser le numérateur pour simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 14. : simplifier par un facteur commun au numérateur et au dénominateur, se souvenir que $(\sqrt{n})^2 = n, n \geq 0$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 15. : factoriser les numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 16. : factoriser les numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 17. : factoriser les numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 18. : factoriser les numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré, se souvenir que $(\sqrt{n})^2 = n, n \geq 0$.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 19. : factoriser les numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré, se souvenir que $(\sqrt{n})^2 = n, n \geq 0$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 20. : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, chaque terme de la somme peut être minoré par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 21. : utiliser le théorème de comparaison.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 22. : utiliser la quantité conjuguée.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 23. : prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n+1}$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 24. : déterminer l'écriture algébrique de Z.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 25. : $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$.

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 26. : $AB = |z_B - z_A|$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 27. : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad \text{et} \quad (\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$

Retour à l'énoncé.

Coup de pouce 28. : étudier le signe de h' sur $]0; +\infty[$

Retour à l'énoncé.

CORRECTIONS

Exercice 1 : Outils

▶ $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star,\ \dfrac{x+x}{x} = \dfrac{2x}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2$

▶ $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star,\ \dfrac{x-x}{x} = \dfrac{0}{x} = 0$

▶ $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \dfrac{1}{-x+1} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{-1-3}{x-1} = \dfrac{-4}{x-1}$

▶ $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \dfrac{x+3}{4x-4} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+3}{4x-4} - \dfrac{4}{4x-4} = \dfrac{x+3-4}{4x-4} = \dfrac{x-1}{4x-4} = \dfrac{x-1}{4(x-1)} = \dfrac{1}{4}$

▶ $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star\setminus\{-3\},$
$$\frac{1}{x^2+3x} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x(x+3)} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x(x+3)} - \frac{2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{1-2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{1-2x-6}{x(x+3)} = \frac{-2x-5}{x(x+3)}$$

Exercice 2 : Prouver qu'une suite est arithmétique

▶ $\forall\, n \in \mathbb{N},$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3}-2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3}-2\frac{u_n-3}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3}-\frac{2u_n-6}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2}$$
$$= \frac{1}{\frac{u_n-4-2u_n+6}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{-u_n+2}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{u_n-3}{-u_n+2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{-u_n+3}{u_n-2} - \frac{1}{u_n-2}$$
$$= \frac{-u_n+3-1}{u_n-2} = \frac{-u_n+2}{u_n-2} = -\frac{u_n-2}{u_n-2} = -1$$

La suite est donc arithmétique de raison -1.

▶ $\forall\, n \in \mathbb{N},$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{-1}{u_n+2}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{-1}{u_n+2}+\frac{u_n+2}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{-1+u_n+2}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1}$$
$$= \frac{1}{\frac{u_n+1}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+2-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} = 1$$

La suite est donc arithmétique de raison 1.

Exercice 3 : Outils

▶ $A(n) = \dfrac{n^2}{n} = \dfrac{n\times n}{n\times 1} = \dfrac{n}{1} = n$

► $B(n) = \dfrac{n}{3n} = \dfrac{n \times 1}{3 \times n} = \dfrac{1}{3}$

► $C(n) = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{n \times 1}{n \times n^2} = \dfrac{1}{n^2}$

► $D(n) = \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times 1} = \sqrt{n}$

► $E(n) = \dfrac{n^2}{n + n^2} = \dfrac{n \times n}{n \times (1+n)} = \dfrac{n}{n+1}$

► $F(n) = \dfrac{n^2 - 9}{n+3} = \dfrac{(n-3)(n+3)}{n+3} = \dfrac{n-3}{1} = n - 3$

► $G(n) = \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{n\sqrt{n}}{n \times n} = \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \dfrac{1 \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 4 : Calculs de limites

► $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$u_n = \dfrac{n^3 + 3n + 1}{5n - 1} = \dfrac{n^3(1 + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3})}{5n(1 - \frac{1}{5n})} = \dfrac{n^3}{5n} \times \dfrac{1 + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{5n}} = \dfrac{n^2}{5} \times \dfrac{1 + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{5n}} = \dfrac{n^2}{5} \times \dfrac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{5n}}$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{5n} = 1$

donc par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{5n}} = \frac{1}{1} = 1.$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{5} = +\infty$ donc par produit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

► $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$u_n = \dfrac{3n^3 - 5n^2 + 3n}{n^4 + 3n^2 + 1} = \dfrac{3n^3(1 - \frac{5n^2}{3n^3} + \frac{3n}{3n^3})}{n^4(1 + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4})} = \dfrac{3n^3}{n^4} \times \dfrac{1 - \frac{5n^2}{3n^3} + \frac{3n}{3n^3}}{1 + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{3}{n} \times \dfrac{1 - \frac{5}{3n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{3n} + \frac{1}{n^2} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} = 1$

donc par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{5}{3n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{1} = 1.$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc par produit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

► $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{-2n^3+5n^2-7}{5n^3+3n} = \frac{-2n^3(1+\frac{5n^2}{-2n^3}-\frac{7}{-2n^3})}{5n^3(1+\frac{3n}{5n^3})} = \frac{-2n^3}{5n^3} \times \frac{1+\frac{5n^2}{-2n^3}+\frac{7}{2n^3}}{1+\frac{3n}{5n^3}} = \frac{-2}{5} \times \frac{1+\frac{5}{-2n}+\frac{7}{2n^3}}{1+\frac{3}{5n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{5}{-2n}+\dfrac{7}{2n^3} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{5n^2} = 1$

donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{5}{-2n}+\frac{7}{2n^3}}{1+\frac{3}{5n^2}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{5} = \dfrac{-2}{5}$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-2}{5}$

► $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{n+3}{\sqrt{n}-1} = \frac{n(1+\frac{3}{n})}{\sqrt{n}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{n}{\sqrt{n}} \times \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \times \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$

donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

► $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{3n+2\sqrt{n}-1}{n^2+3} = \frac{3n(1+\frac{2\sqrt{n}}{3n}-\frac{1}{3n})}{n^2(1+\frac{3}{n^2})} = \frac{3n(1+\frac{2}{3\sqrt{n}}-\frac{1}{3n})}{n^2(1+\frac{3}{n^2})} = \frac{3n}{n^2} \times \frac{1+\frac{2}{3\sqrt{n}}-\frac{1}{3n}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{3}{n} \times \frac{1+\frac{2}{3\sqrt{n}}-\frac{1}{3n}}{1+\frac{3}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{3\sqrt{n}}-\dfrac{1}{3n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n^2} = 1$

donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{3\sqrt{n}}-\frac{1}{3n}}{1+\frac{3}{n^2}} = 1.$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

► Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

En sommant les n termes de u_n, on obtient $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ce qui équivaut à $u_n \geq \sqrt{n}$.

► $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

or $\forall \in \mathbb{N}^\star, u_n \geq \sqrt{n}$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

<u>Exercice 5 : Outil</u>

Compléter les égalités suivantes :

► $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = 3$

► $(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-3) = -4$

► $(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1) = n-1$

► $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 1$

► $(\sqrt{n^3}-\sqrt{n})(\sqrt{n^3}+\sqrt{n}) = n^3-n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$

Déterminer l'écriture algébrique des conjugués des nombres complexes suivants :

a) $z = 1+i$ *b)* $z = 3-2i$ *c)* $z = i$

► $\overline{z} = 1-i$ ► $\overline{z} = 3+2i$ ► $\overline{z} = -i$

d) $z = 2i+1$ *e)* $z = -2i$ *f)* $z = \dfrac{1}{2+i}$

► $\overline{z} = 1-2i$ ► $\overline{z} = 2i$ ► $z = \dfrac{1\times(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{2^2+1^2} = \dfrac{2-i}{5}$ d'où $\overline{z} = \dfrac{2+i}{5}$

g) $z = \dfrac{1}{i}$

► $z = \dfrac{1\times(-i)}{i\times(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{1} = -i$ d'où $\overline{z} = i$

h) $z = \dfrac{1}{2i}$

► $z = \dfrac{1\times(-2i)}{2i\times(-2i)} = \dfrac{-2i}{-(2i)^2} = \dfrac{-2i}{4} = \dfrac{-i}{2}$ d'où $\overline{z} = \dfrac{i}{2}$

i) $z = \dfrac{2-i}{i+1}$

► $z = \dfrac{(2-i)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)} = \dfrac{2-2i-i+i^2}{1^2+1^2} = \dfrac{2-3i-1}{1+1} = \dfrac{1-3i}{2}$ d'où $\overline{z} = \dfrac{1+3i}{2}$

Exercice 6 : Transformations d'écritures

► $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

► $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \sqrt{n+1}-\sqrt{0} = \sqrt{n+1}$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, par composition donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

► $Z = \dfrac{2z-3}{i+1} = \dfrac{2(a+ib)-3}{i+1} = \dfrac{(2a-3)+2ib}{i+1} = \dfrac{[(2a-3)+2ib](1-i)}{(i+1)(1-i)} = \dfrac{(2a-3)+2ib-i(2a-3)-2i^2b}{1^2+1^2}$

$= \dfrac{(2a-3+2b)+i(2b-2a-3)}{2}$ d'où $Re(Z) = \dfrac{(2a-3+2b)}{2}$, $Im(Z) = \dfrac{(2b-2a-3)}{2}$.

► $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2a-3+2b)}{2} = 0 \Leftrightarrow 2a-3+2b = 0 \Leftrightarrow 2a+2b-3 = 0$

Il y a donc une infinité de valeurs de a et b pour lesquelles Z est imaginaire pur...

► $z_B - z_A = 1 + i - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i + \frac{i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.

Donc $AB = |z_B - z_A| = |\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3+9}{4}} = \frac{\sqrt{13-2\sqrt{3}}}{2}$

► h est dérivable sur $]0;+\infty[$, comme somme algébrique de fonctions qui le sont.

$h'(x) = \frac{\frac{-2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} + 2\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} + \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{(x^3+x)} + \frac{x \times 4x}{x(1+x^2)^2} = \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x^2}{x(1+x^2)^2}$

Soit

$h'(x) = \frac{-2 \times (x^2+1)}{x(x^2+1) \times (x^2+1)} + \frac{4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{-2(x^2+1)+4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2-2+4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{2x^2-2}{x(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$

D'où $\forall\ x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x(1+x^2)^2}$.

► Sur $]0;+\infty[$, le dénominateur $x(1+x^2)^2$ de h' est strictement positif car produit de facteurs qui le sont.

Le numérateur est un polynôme du second degré factorisé, il est du signe du coefficient de son terme de plus haut degré (ici 2) « entre ses racines », qui sont 1 et -1.

On en déduit donc que : h' est positif sur $]0;1[$, nul en 1 puis négatif sur $]1;+\infty[$.

Donc h est croissante sur $]0;1[$, puis décroissante sur $]1;+\infty[$.

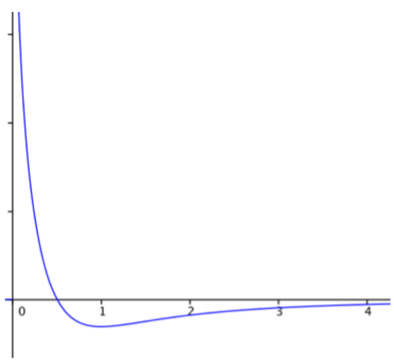

Figure 1 – Graphe de la fonction h