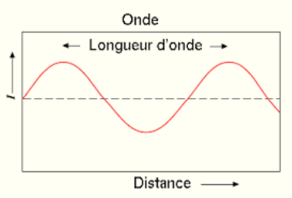
Atelier Maths-Physique: Liens math-physique: vecteurs, fonctions, dérivées...

Sommes-nous sur la même longueur d'onde?

Journée IREM, Bordeaux, 27 novembre 2019



Le groupe REMPhys :

Créé en juin 2017

Enseignants de Lycées : 2 mathématiques, 2 physique
Enseignants universitaires : 2 mathématiques, 2 physique
Autres : 1 maison pour la science, 1 doctorant

Thèmes : cinématique, unités, fonctions, vecteurs...
Prochain thème : le *Logarithme* (le 4/12 à 14h30)

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	
les fonctions		
le nombre dérivé/vitesse		
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions		
le nombre dérivé/vitesse		
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	
le nombre dérivé/vitesse		
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	x, y, z, T, V, p ...
le nombre dérivé/vitesse		
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	x, y, z, T, V, p ...
le nombre dérivé/vitesse	$f'(x)$	
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	x, y, z, T, V, p ...
le nombre dérivé/vitesse	$f'(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t)$, ...
coordonnées/composantes		

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	x, y, z, T, V, p ...
le nombre dérivé/vitesse	$f'(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t)$, ...
coordonnées/composantes	$\vec{V} \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix}$	

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	t, x, y, z...
les fonctions	f, g, ...	x, y, z, T, V, p ...
le nombre dérivé/vitesse	$f'(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t)$, ...
coordonnées/composantes	$\vec{V}\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix}$	$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$

Des différences de notations bien connues :

	Maths	Physique
les variables	x	$t,\ x,\ y,\ z\dots$
les fonctions	$f,\ g,\ \dots$	$x,\ y,\ z,\ T,\ V,\ p\ \dots$
le nombre dérivé/vitesse	$f'(x)$	$\frac{df}{dx}(x),\ \frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t),\ \dots$
coordonnées/composantes	$\vec{V}\ \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix}$	$\vec{V}\ \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$

Et chacun pour de bonnes raisons...

Des motivations différentes :

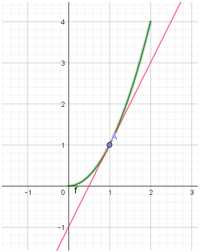
Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Des motivations différentes :

Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



lien avec la tangente

Des motivations différentes :

Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vitesse instantanée :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} = V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Des motivations différentes :

Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vitesse instantanée :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} = V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Mais qui peuvent se rejoindre...

Des motivations différentes :

Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vitesse instantanée :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} = V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Mais qui peuvent se rejoindre...

Par exemple, parler de vitesse moyenne et instantanée en math,

Des motivations différentes :

Nombre dérivé :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vitesse instantanée :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} = V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Mais qui peuvent se rejoindre...

Par exemple, parler de vitesse moyenne et instantanée en math, mais aussi :

Démontrer que si f est dérivable en a alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

Pour aller plus loin :

- Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité : Eduscol
- Expérimentation et modélisation, la place du langage mathématique en physique-chimie (Gpe de Rech. et d'Innov. ds l'Ens. de Sciences Physiques) : GRIESP

Pour aller plus loin :

- Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité : Eduscol
- Expérimentation et modélisation, la place du langage mathématique en physique-chimie (Gpe de Rech. et d'Innov. ds l'Ens. de Sciences Physiques) : GRIESP

Une fois ces différences pointées, a-t-on levé toutes les difficultés ?

Un besoin d'interprétation en des termes mathématiques :

Un besoin d'interprétation en des termes mathématiques :

Exemple d'exercice de cinématique :

On étudie le mouvement d'un système selon l'axe Ox. L'évolution de la position du système est décrite par l'équation :
$x(t) = 0,25t^2 + 0,25t$.

1. Calculer la position occupée par le système à $t = 5s$.
2. Tracer la représentation graphique de l'évolution de la position du système lors des dix premières secondes du mouvement.
3. Déterminer l'équation horaire de la vitesse du système.
4. Calculer la vitesse à $t = 3s$.
5. Au bout de combien de temps la vitesse atteinte sera de $4,0m.s^{-1}$.
6. Déterminer l'équation horaire de l'accélération du système.

Un besoin d'interprétation en des termes mathématiques :

Exemple d'exercice de cinématique :

On étudie le mouvement d'un système selon l'axe Ox. L'évolution de la position du système est décrite par l'équation :
$x(t) = 0,25t^2 + 0,25t$.

1. Calculer la position occupée par le système à $t = 5s$.
2. Tracer la représentation graphique de l'évolution de la position du système lors des dix premières secondes du mouvement.
3. Déterminer l'équation horaire de la vitesse du système.
4. Calculer la vitesse à $t = 3s$.
5. Au bout de combien de temps la vitesse atteinte sera de $4,0m.s^{-1}$.
6. Déterminer l'équation horaire de l'accélération du système.

ACTIVITE : Réécrire l'énoncé sous forme d'exercice de math.

Soit la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$.

On étudie le mouvement d'un système selon l'axe Ox. L'évolution de la position du système est décrite par l'équation : $x(t) = 0,25t^{\mathbf{2}} + 0,25t$.

1. Calculer $f(5)$. Calculer la position occupée par le système à $t = 5s$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan (O, x, y). Tracer la représentation graphique de l'évolution de la position du système lors des dix premières secondes du mouvement.
3. Déterminer la fonction dérivée f'. Déterminer l'équation horaire de la vitesse du système.
4. Calculer $f'(3)$. Calculer la vitesse à $t = 3s$.
5. Déterminer l'antécédent de 4 par la fonction f'. Au bout de combien de temps la vitesse atteinte sera de $4,0m.s^{-\mathbf{1}}$.
6. Déterminer la fonction f''. Déterminer l'équation horaire de l'accélération du système.

Des raccourcis "évidents" (.. ?) sont vite arrivés... :

Même mathématiquement bien compris, un problème peut se résoudre par différentes approches

Exemple : exercice sur les vecteurs (équilibre des forces) :

Des raccourcis "évidents" (.. ?) sont vite arrivés... :

Même mathématiquement bien compris, un problème peut se résoudre par différentes approches

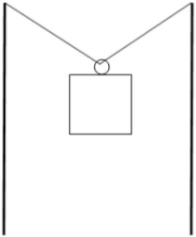
Exemple : exercice sur les vecteurs (équilibre des forces) :

Exercice 1 : Objet suspendu

On s'intéresse à un objet de masse m=5,0kg suspendu entre deux mats à l'aide de câbles faisant chacun un angle α=30° avec les mats. L'objet est immobile.

Donnée : $g=9{,}81 N.kg^{-1}$.

1. Inventorier les forces qui s'exercent sur la masse.
2. Représenter schématiquement ces forces sur le schéma sans soucis d'échelle.
3. Calculer la valeur de chacune des forces.



Des raccourcis "évidents" (.. ?) sont vite arrivés... :

Même mathématiquement bien compris, un problème peut se résoudre par différentes approches

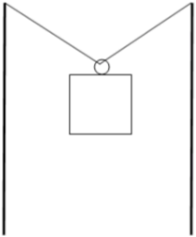
Exemple : exercice sur les vecteurs (équilibre des forces) :

Exercice 1 : Objet suspendu

On s'intéresse à un objet de masse m=5,0kg suspendu entre deux mats à l'aide de câbles faisant chacun un angle α=30° avec les mats. L'objet est immobile.

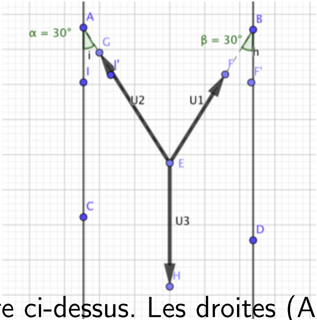
Donnée : $g=9{,}81 N.kg^{-1}$.

1. Inventorier les forces qui s'exercent sur la masse.
2. Représenter schématiquement ces forces sur le schéma sans soucis d'échelle.
3. Calculer la valeur de chacune des forces.



ACTIVITE : Réécrire sous forme d'exercice de math et le résoudre.

Enoncé sous forme mathématique du même problème (où les réponses aux questions 1 et 2 de l'exercice de physique font partie de l'énoncé) :



On considère la figure ci-dessus. Les droites (AC) et (BD) sont parallèles. La direction de $\overrightarrow{U_3}$ est parallèle à (AC). Les directions de $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ font un angle de 30^o avec (BD) et (AC) respectivement. Le triangle EAB est isocèle en E. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ sachant que

$$\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3} = \vec{0}, \qquad \|\overrightarrow{U_3}\| = 50$$

1) Résolution succinte (mais correcte !)

Par symétrie du problème, $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ sont nécessairement de même norme. La projection de l'égalité vectorielle dans la direction de $\overrightarrow{U_3}$ donne :

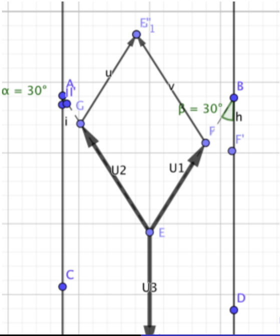
$$2\|\overrightarrow{U_2}\|\cos(\alpha) - \|\overrightarrow{U_3}\| = 0$$

Comme $\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\|\overrightarrow{U_1}\| = \|\overrightarrow{U_2}\| = \frac{50}{\sqrt{3}}$.

2) Résolution géométrique basée sur le parallélogramme

Le fait que $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ sont nécessairement de même norme peut se justifier géométriquement en se basant sur la définition de la somme de vecteurs :

La somme des vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ est le vecteur $\overrightarrow{EE''}$ correspondant à la diagonale du parallélogramme formé à partir des vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$



2) Résolution géométrique basée sur le parallélogramme

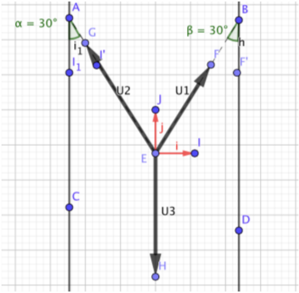
Le fait que $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ sont nécessairement de même norme peut se justifier géométriquement en se basant sur la définition de la somme de vecteurs :

La somme des vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ est le vecteur $\overrightarrow{EE''}$ correspondant à la diagonale du parallélogramme formé à partir des vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$

Pour que $\overrightarrow{EE''}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{U_3}$, le parallélogramme doit être symétrique par rapport à la droite verticale passant par E. Alors $\|\overrightarrow{U_1}\| = \|\overrightarrow{U_2}\|$.

3) Résolution à partir d'un repère et des coordonnées/composantes

Fixons un repère orthonormé $(E, \vec{i}, \vec{j})$



3) Résolution à partir d'un repère et des coordonnées/composantes

Fixons un repère orthonormé $(E, \vec{i}, \vec{j})$ Dans ce repère les coordonnées / composantes des vecteurs sont :

$$\overrightarrow{U_1} \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{U_1}\| \sin(\beta) \\ \|\overrightarrow{U_1}\| \cos(\beta) \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{U_2} \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{U_2}\| \sin(\alpha) \\ \|\overrightarrow{U_2}\| \cos(\alpha) \end{pmatrix} ; \qquad \overrightarrow{U_3} \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\overrightarrow{U_3}\| \end{pmatrix}$$

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3} = \vec{0}$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{U_1}\| \sin(\beta) - \|\overrightarrow{U_2}\| \sin(\alpha) & = & 0 \\ \|\overrightarrow{U_1}\| \cos(\beta) + \|\overrightarrow{U_2}\| \cos(\alpha) & = & \|\overrightarrow{U_3}\| \end{cases}$$

Et comme $\alpha = \beta = 30^o$, on déduit que $\|\overrightarrow{U_1}\| = \|\overrightarrow{U_2}\| = \frac{50}{\sqrt{3}}$.

Quand les matheux font de la physique... :

Exemple d'un exercice tiré d'un livre de mathématiques :
Sofia essaie d'ajuster au mieux son service au volley-ball. Après avoir visionné ses matchs, elle estime que la trajectoire de son ballon est une parabole. La hauteur du ballon, exprimée en mètres, est modélisée par la fonction définie par :

$$h(t) = -0,5\,t^2 + 2,1\,t + 2$$

avec t en secondes.

1. Etablir la forme canonique de $h(t)$.
2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?
3. Au bout de combien de temps le ballon retrouve-t-il sa hauteur initiale ?
4. Si aucun joueur n'intercepte le ballon, au bout de combien de temps le ballon retombe-t-il au sol ?

Enoncé

Sofia essaie d'ajuster au mieux son service au volley-ball. Après avoir visionné ses matchs, elle estime que la trajectoire de son ballon est une parabole. La hauteur du ballon, exprimée en mètres, est modélisée par la fonction définie par : $h(t) = -0,5\,t^2 + 2,1\,t + 2$ avec t en secondes.

1. Etablir la forme canonique de $h(t)$.
2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?
3. Au bout de combien de temps le ballon retrouve-t-il sa hauteur initiale ?
4. Si aucun joueur n'intercepte le ballon, au bout de combien de temps le ballon retombe t-il au sol ?

Regard du physicien sur l'énoncé :

- Le mot *trajectoire*, porte à confusion, car $h(t)$ n'est pas l'expression de la trajectoire du ballon mais c'est la loi horaire du mouvement du ballon.
- Le coefficient de t^2 n'est pas conforme à la situation physique du problème. Il doit être égal à $-0.5\,g$ soit environ -5.
- A aucun moment le référentiel du temps t n'est précisé : $t = 0$ au lancement de la balle.

Ecriture de l'exercice dans un contexte plus physique :
Sofia essaie d'ajuster au mieux son service au volley-ball. A l'aide d'un logiciel d'acquisition de données, elle modélise le mouvement du ballon et elle obtient les deux équations :

$$\begin{cases} z(t) = -5,0\,t^2 + 2,1\,t + 2,0 & \text{(l'équation donnant la hauteur en fonction du temps } t\text{)} \\ x(t) = 4,5\,t & \text{(l'équation donnant l'abscisse en fonction du temps } t\text{)} \end{cases}$$

On notera $t_0 = 0\,s$ l'instant où la main touche le ballon.

1. Etablir l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon.
2. A quelle hauteur part le ballon à l'instant initial ?
3. A quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ?
4. Au bout de combien de temps le ballon retrouve-t-il sa hauteur initiale ?
5. Au bout de combien de temps le ballon retombe-t-il au sol ?

Remarque :

L'écriture des coefficients (même $2,0$), avec un chiffre après la virgule est une indication de la précision (au $1/10$ ième) de ces coefficients.

Pour le physicien les coefficients de t et t^2 s'expriment en fonction de quantités bien précises (v_0 la vitesse initiale, α l'angle que fait le vecteur vitesse initial avec l'horizontale) :

$$\begin{cases} z(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + z(0) & \text{(hauteur en fonction du temps } t\text{)} \\ x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t + x(0) & \text{(abscisse en fonction du temps } t\text{)} \end{cases}$$

Un exercice de trigo pourrait consister à déterminer v_0 et α.

Sofia essaie d'ajuster au mieux son service au volley-ball. A l'aide d'un logiciel d'acquisition de données, elle modélise le mouvement du ballon et elle obtient les deux équations :

$$\begin{cases} z(t) = -5,0\, t^2 + 2,1\, t + 2,0 & \text{(l'équation donnant la hauteur en fonction du temps } t\text{)} \\ x(t) = 4,5\, t & \text{(l'équation donnant l'abscisse en fonction du temps } t\text{)} \end{cases}$$

On notera $t_0 = 0\, s$ l'instant où la main touche le ballon.

1. Etablir l'équation $y(x)$ de la trajectoire du ballon.
2. A quelle hauteur part le ballon à l'instant initial ?
3. A quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ?
4. Au bout de combien de temps le ballon retrouve-t-il sa hauteur initiale ?
5. Au bout de combien de temps le ballon retombe-t-il au sol ?

Et pour terminer, une question subsidiaire :

Soit

$$T(x,y) = x^2 + y^2$$

Question :

$$T(r,\theta) = ???$$

Et pour terminer, une question subsidiaire :

Soit

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

Question :

$$T(r, \theta) = ???$$

En math, x et y sont des variables *muettes* donc

$$T(r, \theta) = r^2 + \theta^2$$

Et pour terminer, une question subsidiaire :

Soit

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

Question :

$$T(r, \theta) = ???$$

En math, x et y sont des variables *muettes* donc

$$T(r, \theta) = r^2 + \theta^2$$

En physique, on ne change pas le nom d'une quantité physique, mais implicitement (r, θ) désignent les coordonnées polaires donc

$$T(r, \theta) = r^2$$

Merci !

Pour rejoindre le groupe Maths Physique (REMPhy) :

Vincent.Bruneau@u-bordeaux.fr